BREVE TRATTATO SULLA LINEA ELETTRICA DI TRASMISSIONE

Di Vincenzo Iorio

Introduzione

La corrente elettrica continua, circola nei corpi conduttori in base alle modalità che conosciamo dallo studio dell'elettrologia. Sappiamo che una corrente elettrica continua circolante in un conduttore può generare un campo magnetico, viceversa possiamo attribuire nei punti del conduttore dove si accumula un certo potenziale anche un campo elettrico. Nel caso appunto della corrente continua, l'ampiezza dei campi che si generano attorno al conduttore hanno un andamento decrescente in funzione della distanza da essi e non generano fenomeni evidenti a distanze molto elevate dal conduttore stesso. Se consideriamo una corrente variabile, per esempio di tipo alternato le modalità degli effetti misurabili a distanze elevate dal conduttore possono assumere un diverso significato. In quest'ultimo caso la fisica riconosce un effetto di propagazione che permette un certo trasferimento di energia dal conduttore in esame all'ambiente circostante. Questo fenomeno è maggiormente evidente se la frequenza dell'oscillazione elettrica è piuttosto elevata. Le modalità in cui avvengono queste propagazioni fanno parte di una discussione da approfondire che riguarda il concetto di antenna, in questa sede analizziamo invece i fenomeni che intervengono quando usiamo i conduttori per trasferire energia elettrica alternata di una certa frequenza lungo la loro direzione.

LA LINEA ELETTRICA DI TRASMISSIONE

Per evitare che una linea elettrica possa costituire un'antenna trasmittente, i conduttori devono essere geometricamente realizzati in modo da rendere minimo questo effetto. Si conoscono due principali configurazioni: la prima è la linea bifilare tramite la quale l'altro conduttore riesce in qualche modo a compensare l'effetto di campo prodotto dall'altro, la seconda prevede una disposizione geometrica concentrica dei due conduttori chiamata linea coassiale, anch'essa dotata di proprietà similari alla precedente per quanto riguarda la compensazione.

Un'oscillazione elettrica ad alta frequenza mandata l'ungo la linea di trasmissione è molto simile ad un’onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto. Nel caso del vuoto e in prima approssimazione anche nell'aria la propagazione elettromagnetica acquista una velocità costante di 299792,458 Km/sec (300.000 Km/sec). La natura del mezzo interposto influenza la velocità di propagazione tramite la formula 1.01 qui esposta.

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \qquad (1.01)$$

La formula mostra i termini di permeabilità magnetica e permettività elettrica, del mezzo interposto, nel caso del vuoto tali termini sono rispettivamente 12.56 10^{-7} H/m e 8.85 10^{-12} F/m, e danno ragione circa il valore della velocità dell'onda elettromagnetica che ci aspettavamo.
In una linea di trasmissione la velocità di propagazione è sicuramente più bassa della velocità assunta dall'onda elettromagnetica nel vuoto. Questo fatto dipende dal diverso valore di permettività elettrica dei dielettrici usati per i cavi di trasmissione. La permeabilità magnetica dei materiali utilizzati per le linee, può essere normalmente assunta uguale a uno. Quindi nel caso di una linea la formula precedente può diventare: $u = 1/\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$ dove ε_r è la permettività relativa del dielettrico utilizzato. Una formula derivabile dall'equazione 1.01 è rappresentata dall'equazione 1.011 qui di seguito riportata. In questo caso la velocità di propagazione dipende direttamente dai termini di induttanza e capacità del mezzo interposto.

$$u = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad (1.011)$$

La conoscenza di questa velocità può costituire un importante dato di studio per la linea che stiamo considerando.
Definita la velocità dell'onda e la sua frequenza di oscillazione possiamo determinare la lunghezza d'onda tramite la formula 1.02.

$$u = \lambda \cdot f \qquad (1.02)$$

Una linea, sia essa bifilare o coassiale, è costituita da fili conduttori opportunamente distanziati e montati in un contenitore isolante. I conduttori sono investiti dal campo magnetico prodotto dalla corrente che vi circola, e dal potenziale applicato ad essi. Queste ragioni geometriche indissolubili comportano la presenza di un’induttanza e di una capacità che appaiono residenti nella linea stessa. I parametri reattivi presenti nella linea, si comportano come costanti distribuite se la linea ha una geometria omogenea. In più sarà senza dubbio presente anche una perdita ohmmica dovuta ai cavi conduttori e anche ad altri fattori.

Lo studio matematico applicato a una linea di questo tipo immaginata infinitamente lunga, viene effettuato applicando un’equazione differenziale che risolta ci fornisce alcuni semplici risultati.

L'ampiezza della tensione di segnale (portante) presente lungo la linea, subirà un andamento decrescente di tipo esponenziale dovuto alle perdite presenti. Il segnale di tensione presente all'ingresso della linea, diventerà praticamente zero, quando viene misurato a distanza infinita dal morsetto di ingresso.

La soluzione opportunamente semplificata che esprime questo risultato è la seguente:

$$\overline{V} = \overline{V_o} \cdot e^{-\gamma X} \qquad (1.03)$$

dove X è la distanza dall'origine della linea, e **γ** è definito come la **costante di propagazione della linea**. Quest'ultima costante può essere espressa come:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} \qquad (1.04)$$

dove R, rappresenta la resistenza ohmica della linea, G la conduttanza per unità di lunghezza, e le costanti L e C, rappresenterebbero l'induttanza e la capacità distribuita della linea già considerate precedentemente. Scomponendo la 1.04 nella sua parte reale e immaginaria avremo:

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad (1.05)$$

dove α, è definita come la costante di attenuazione e β, e la costante di fase.

La costante α ha il significato di attenuazione per unità di lunghezza e si può misurare in Neper/metro (1Neper= 8.686 dB).

Attraverso semplici passaggi matematici applicati alla soluzione dell'equazione differenziale di partenza che non abbiamo in questa sede rappresentato, possiamo definire l'espressione **dell'impedenza caratteristica Z_0** qui riportata:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \qquad (1.06)$$

considerando una linea con perdite molto contenute, o praticamente zero, possiamo trascurare i termini R e G scrivendo:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (1.07)$$

poichè le costanti L e C si intendono distribuite lungo la lunghezza della linea, queste assumono uno specifico valore costante e caratteristico per un dato tipo di cavo. Per questa ragione l'impedenza o la resistenza caratteristica di una linea non dipende dalla lunghezza della linea. Questo risultato è dimostrabile direttamente dall'equazione differenziale caratteristica della linea.

Anche il vuoto possiede un'impedenza caratteristica, essa e definita come: costante di propagazione dell'aria libera o del vuoto ed è determinata invece da:

$$\varsigma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega \qquad (1.071)$$

Utilizzando l'equazione 1.05 possiamo con semplici passaggi dimostrare che il termine β definito come la costante di fase, può essere considerato uguale a:

$$\beta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{L \cdot C} \qquad (1.07)$$

e si misura in rad/m, Il termine α, invece viene definito dall'espressione:

$$\alpha = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{C / L} + \frac{G}{2} \cdot \sqrt{L / C} \qquad (1.08)$$

che viene misurata in Neper/m. I termini G, e R hanno lo stesso significato visto in precedenza. Trascurando il termine G, e sostituendo per il valore di Z_0 quello riportato dall'equazione 1.07 otteniamo una semplice formula in funzione della sola resistenza specifica R:

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot Z_0} \qquad (1.09)$$

Utilizzando la formula 1.07 possiamo con semplici passaggi matematici esprimere la costante di fase anche in un'altro modo. Infatti, possiamo sostituire al termine f, l'equazione ricavabile dalla 1.02 in termini di velocità di propagazione u. Successivamente possiamo sostituire il termine u con l'equazione 1.011 e praticando le opportune semplificazioni possiamo avere:

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \qquad (1.10)$$

In quest'ultima espressione compare il termine λ, che rappresenta la **lunghezza d'onda della linea**. Questo valore è già stato definito dall'equazione 1.02, esso intende definire quella distanza minima esistente fra due punti le cui tensioni (o correnti) sono in fase fra loro. Oppure che è la stessa cosa, *la lunghezza d'onda è quella lunghezza fisicamente misurabile che esprime la distanza tra due ventri o picchi di tensione, misura pari al periodo di un'oscillazione di un segnale elettrico o applicabile identicamente ad un onda elettromagnetica.*

Linea reale di lunghezza finita

Immaginiamo una linea di trasmissione di lunghezza finita chiusa su di un impedenza uguale all'impedenza caratteristica della linea. In questo caso la linea si comporterà come una linea di trasmissione infinitamente lunga.

In poche parole, il generatore applicato all'estremità di ingresso della linea provvederà a incanalare una certa energia che si propagherà sottoforma di onde elettromagnetiche. Questa energia sarà assorbita dall'impedenza Z_U e quindi completamente smaltita sottoforma di calore.

All'interno della linea si instaurerà un regime di onde progressive viaggianti che si propagherà con una velocità che dipenderà dalle costanti della linea stessa. In questo caso si dice che la linea è perfettamente adattata.

La lunghezza fisica della linea potrà essere considerata ininfluente.

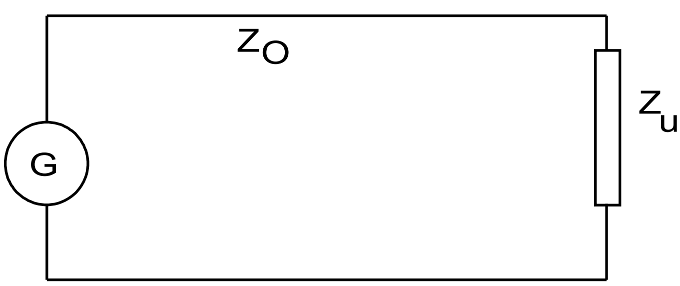

Fig 1.01

Normalmente la resistenza interna del generatore che applichiamo all'ingresso della linea di trasmissione deve essere dello stesso valore dell'impedenza caratteristica del cavo utilizzato. In questo modo il generatore vede tramite la linea adattata un'impedenza uguale a quella esistente al suo interno. Come sappiamo questa configurazione permette il trasferimento della massima potenza fra generatore e utilizzatore. Quest'ultima considerazione deve essere esaminata attentamente dal lettore, poiché è un punto molto importante che emerge continuamente in campo elettronico. Per questo caso consigliamo al lettore di leggere la teoria dei quadripoli, nonché le tecniche di interfacciamento in bassa frequenza.

E' molto interessante studiare il caso di circuiti non perfettamente adattati, cioè collegamenti che prevedono una certa differenza fra le impedenze della linea e dell'utilizzatore. In questi casi la lunghezza della linea può generare interessanti fenomeni e inoltre parte dell'energia a radiofrequenza rimbalza potremo dire fra l'utilizzatore e il generatore. Se all'interno della linea si verificano due propagazioni, chiamate “propagazione diretta e riflessa”, avremo la generazione di un regime stazionario normalmente dannoso per quanto riguarda il rendimento del sistema, e inficiante l'incolumità del generatore stesso.

Possiamo farci una ragione di questo fatto, considerando che nel caso dei circuiti a corrente continua o comunque funzionanti a bassa frequenza, l'energia in gioco dipende dal valore delle resistenze del circuito. Se il generatore fornisce una determinata quantità di energia, sarà solo perché questa energia è necessaria per permettere la circolazione di una determinata corrente richiesta a sua volta da un valore ohmico presente nel circuito. Nel caso della linea, grazie all'ordine più elevato di frequenza per cui viene utilizzata entrano in gioco i parametri reattivi della linea. L'energia prenderà a viaggiare immediatamente nei pressi del generatore, e il valore sarà dipendente dall'impedenza della linea. Ecco perché una linea può essere rappresentata come una guida d'onda che convoglia la propagazione elettromagnetica lungo di essa. L'energia che lascia il generatore non è a conoscenza del valore dell'impedenza che troverà alla fine della linea. Ricordando che le condizioni di massimo trasferimento di energia si verificano solo quando l'impedenza di uscita è uguale al valore di Z_0, potremo senza altro affermare che per valori diversi dell'impedenza Z_u da Z_0 sarà necessaria minore energia di quella che è partita dal generatore, per questa ragione parte dell'energia tornerà indietro propagandosi verso il generatore che l'ha prodotta.

In questo caso potremo rappresentare matematicamente il coefficiente di riflessione della linea in base al valore dell'impedenza di carico rispetto all'impedenza caratteristica della linea quindi:

$$\Gamma_u = \frac{Z_u - Z_0}{Z_u + Z_0} \qquad (1.11)$$

una volta definito il coefficiente di riflessione possiamo definire anche il ROS della linea (Voltage Standing Wave Ratio) definito come il rapporto tra il massimo di tensione e il minimo di tensione dello stato stazionario presente sulla linea cioè:

$$ROS = \frac{V\max}{V\min} = \frac{1 + |\Gamma_u|}{1 - |\Gamma_u|} \qquad (1.12)$$

quindi Γ_u può anche essere definito come:

$$\Gamma_u = \frac{ROS - 1}{ROS + 1} \qquad (1.13)$$

Un'altra formulazione molto comoda che tiene conto anche della distanza dal carico x sulla quale viene misurato il ROS è la seguente:

$$ROS = \frac{1 + \Gamma \cdot e^{-2\alpha x}}{1 - \Gamma \cdot e^{-2\alpha x}}$$

dove α è il coefficiente di attenuazione in neper e x la distanza in metri. Abbiamo detto che nel caso di linea non perfettamente adattata la lunghezza di essa influisce in modo apprezzabile su alcune caratteristiche.

Si dimostra matematicamente che una linea lunga mezza lunghezza d'onda per qualsiasi valore di impedenza caratteristica presenta sempre nei confronti del generatore un valore di impedenza pari a Z_u. Questo fatto spiega la ragione del perché in alcuni collegamenti in alta frequenza è preferibile usare una linea lunga esattamente un multiplo di mezza lunghezza d'onda.

Un caso interessante e la linea lunga un quarto d'onda. Infatti la teoria mostra che la linea lunga un quarto d'onda presenta caratteristiche tali da farla ritenere un circuito risonante. Per queste ragioni si dimostra che l'impedenza di uscita o di carico Z_u può essere vista all'ingresso del generatore come:

$$Z_g = \frac{Z_0^2}{Z_u} \qquad (1.14)$$

abbiamo espresso Z_e come l'impedenza vista dal generatore e Z_0 l'impedenza caratteristica della linea a un quarto d'onda, Z_u esprime invece come abbiamo già fatto in precedenza l'impedenza del carico posto all'estremità di uscita della linea. Questo fatto ci permette di utilizzare i tronchetti di linea a un quarto d'onda come adattatori di impedenza. vedi fig. 1.02 In questo caso per adattare un particolare generatore con impedenza Z_e ad un carico Z_u, occorrerà una linea lunga un quarto d'onda con impedenza caratteristica:

$$Z_0 = \sqrt{Z_e \cdot Z_u} \qquad (1.15)$$

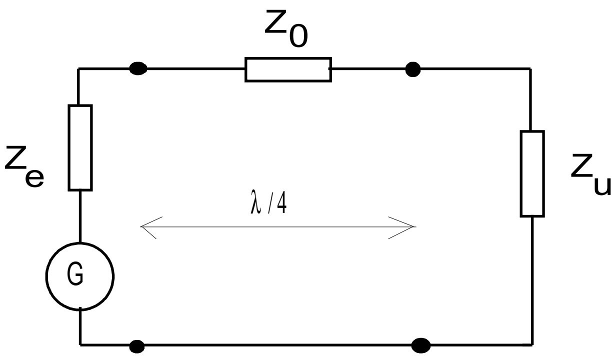

Fig. 1.02

Ritornando a considerare una linea generica, completiamo questa nostra breve trattazione riassuntiva indicando la formula generale che tiene conto della lunghezza "l" di una generica linea in modo da calcolare l'impedenza all'ingresso di essa nei vari casi di carico.

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_u \cosh(\gamma l) + Z_0 sinh(\gamma l)}{Z_u sinh(\gamma l) + Z_0 \cosh(\gamma l)} \qquad (1.15)$$

Quest'ultima formula utilizza le funzioni iperboliche e considera il coefficiente di propagazione già trattato precedentemente. Considerando una linea priva di perdite possiamo scrivere:

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_u + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_u \tan(\beta l)} \qquad (1.16)$$

in questo caso è stato riportato il termine β, costante di fase già visto precedentemente. Il termine l, invece rappresenta come abbiamo già detto la lunghezza del tratto di linea che stiamo considerando. In termini di ammettenza la formula precedente può essere scritta come:

$$Y_e = Y_0 \frac{Y_u + jY_0 \tan(\beta l)}{Y_0 + jY_u \tan(\beta l)} \qquad (1.17)$$

Volendo generalizzare il concetto di impedenza di ingresso, definendo l'impedenza Z_Z di un generico punto della linea possiamo scrivere:

$$Z_z = \frac{V_{(z)}}{I_{(z)}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{(z)}}{1 - \Gamma_{(z)}} \qquad (1.18)$$

se vogliamo calcolare l'impedenza a una distanza l caratteristica dal carico possiamo scrivere:

$$Z_e = Z(-l) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(-l)}{1 - \Gamma(-l)} \qquad (1.19)$$

Scrivendola in altra forma, esprimendo sottoforma di ammettenza del tratto di linea considerato l, avremo:

$$Y_{(l)} = \frac{1}{Z_u} \cdot \frac{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}} = \frac{1}{Z_u} \cdot \frac{1 - \Gamma(\cos 2\beta l - jsin2bl)}{1 + \Gamma(\cos 2\beta l - jsin2\beta l)} \qquad (1.20)$$

L'impedenza di un punto della linea nelle condizioni di massimo coefficiente di riflessione, e cioè nel caso di linea terminante in corto circuito Z_{XC}, oppure linea terminante aperta Z_{Xa}, è calcolabile con le formule:

$$Z_{xa} = -j\frac{R_u}{Tg\beta x}$$

$$Z_{xc} = +jR_u Tg\beta x \qquad (1.21)$$

dove x è la distanza calcolata dal carico verso il generatore.
Volendo determinare l'impedenza all'ingresso del tratto di linea aperto o in cortocircuito avremo:

$$Z_{ia} = -j\frac{R_u}{Tg\beta l}$$

$$Z_{ic} = +jR_u Tg\beta l \qquad (1.22)$$

dove l, è la lunghezza della linea, β è determinabile con la formula vista precedentemente che può essere definita anche come, $\beta = 2\pi fx/u$, di cui x è la lunghezza del tratto di linea e u la velocità di propagazione.
E' facile calcolare la lunghezza di linea del tratto contraddistinto dal primo minimo di tensione (d_{min}) partendo dal carico come:

$$d_{(\min)} = ar\cos - \frac{\Gamma}{2\beta} \qquad (1.23)$$

Tuttavia è sempre possibile calcolare l'impedenza caratteristica di una linea bifilare o coassiale applicando le formule seguenti:

$$Z_{0(bifilare)} = (276)\log\frac{2D}{d}$$

$$Z_{0(coassiale)} = (138)\log\frac{D}{d} \qquad (1.24)$$

Nel caso della linea bifilare D esprime la distanza tra i due fili, e d rappresenta il diametro dei conduttori. Nel caso della linea coassiale D esprime il diametro del conduttore esterno di schermo misurato internamente, e d il diametro del conduttore interno.
E' anche possibile determinare analiticamente i parametri specifici L, e C di una linea conoscendo la geometria del cavo. Abbiamo per ciascuna disposizione dei conduttori:

$$L_{(H/m)(coassiale)} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$L_{(H/m)(bifilare)} = \frac{\mu_r \cdot \mu_0}{\pi} \log\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$C_{(F/m)(coassiale)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\log\left(\frac{D}{d}\right)} \qquad (1.25)$$

$$C_{(F/m)(bifilare)} = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\log\left(\frac{D}{d}\right)}$$

I valori D, e d, hanno lo stesso significato visto precedentemente.

Ricordiamo al lettore interessato l'indispensabile ausilio grafico della carta di Smith, utilizzata appunto per la soluzione di problemi concernenti le linee di trasmissione. Molte delle soluzioni calcolabili con le formule che abbiamo conosciuto in questa sede, sono già risolte per via grafica dalla carta di Smith. Per questa ragione consigliamo al lettore di consultare testi più approfonditi sull'argomento in modo da conoscere tutti i problemi concernenti le linee di propagazione per alta frequenza.

Riassunto tratto dagli appunti di elettronica utilizzati per la stesura del testo "**Letture di Fisica & elettrologia**" di **ENZO IORIO**.