Formule generali di carica e scarica dei condensatori in un circuito RC

A cura di *Eugenio Amitrano*

Contenuto dell'articolo:

1. Introduzione 2
2. Carica e scarica di un condensatore 2
3. Formula generale per tensioni fisse 4
4. Formula generale ampliata per tensioni variabili . . . 5
5. Conclusioni 6

1. Introduzione

Il presente articolo vuole descrivere, attraverso delle formule generali, il comportamento dei condensatori in un circuito RC.

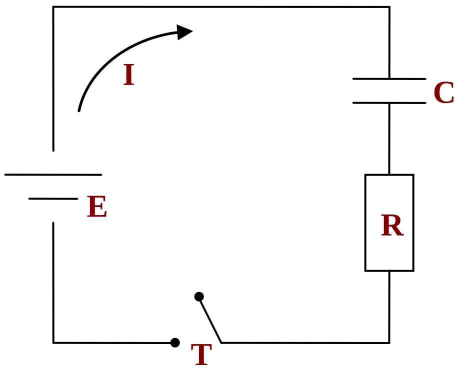

FIG. 1 – Circuito RC

2. Carica e scarica di un condensatore

Iniziamo il nostro percorso con il calcolo della carica e della scarica del condensatore nel modo convenzionale.

Indichiamo con $V(t)$ la tensione misurata ai capi del condensatore al tempo t.

Carica del condensatore

Riferendoci al circuito in *fig.1*, consideriamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T = aperto \\ V(t=0)=0 \Leftrightarrow Q(t=0)=0 \\ E>0 \end{cases}$$

Al momento della chiusura dell'interruttore T valutiamo la variazione delle varie grandezze nel tempo. Applichiamo la legge di ohm per la misura della differenza di potenziale ai capi della resistenza:

$$\textbf{(1)} \qquad E - V(t) = I(t) \cdot R$$

Per definizione $V(t)=\frac{Q(t)}{C}$ e la corrente è la variazione di carica nel tempo $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$.

Sostituendo queste due relazioni nella **(1)**, possiamo ottenere la formula per la carica del condensatore.

$$E-\frac{Q(t)}{C}=\frac{dQ(t)}{dt}\cdot R\to\frac{E\cdot C-Q(t)}{R\cdot C}=\frac{dQ(t)}{dt}\to\frac{dt}{R\cdot C}=\frac{dQ(t)}{E\cdot C-Q(t)}\to\int_0^t\frac{dx}{R\cdot C}=\int_0^t\frac{1}{E\cdot C-Q(x)}dQ(x)\to$$

$$\to-\frac{1}{R\cdot C}\int_0^t dx=\int_0^t\frac{1}{Q(x)-E\cdot C}dQ(x)\to-\frac{t}{R\cdot C}=\log\left(\frac{Q(t)-E\cdot C}{Q(0)-E\cdot C}\right)\to e^{\frac{-t}{R\cdot C}}=1-\frac{Q(t)}{E\cdot C}\to$$

$$\to Q(t)=E\cdot C\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Formula per la carica del condensatore: $\boxed{V(t)=E\cdot\left(1-e^{\frac{-t}{R\cdot C}}\right)}$

<u>Scarica del condensatore</u>

Riferendoci sempre al circuito in *fig.1*, consideriamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T=aperto \\ V(t=0)=\dfrac{Q(t=0)}{C}>0 \\ E=0\ \text{ (senza generatore di tensione)}\end{cases}$$

Come per la carica, al momento della chiusura dell'interruttore T valutiamo la variazione delle varie grandezze nel tempo. Applichiamo la legge di ohm per la misura della differenza di potenziale ai capi della resistenza: $E-V(t)=I(t)\cdot R$.
Essendo $E=0$ risulta in fine:

$$\textbf{(2)}\qquad -V(t)=I(t)\cdot R$$

Noi sappiamo che $V(t)=\frac{Q(t)}{C}$ e $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$, e sostituendo queste due relazioni nella **(2)**, possiamo ottenere la formula per la scarica.

$$-\frac{Q(t)}{C}=\frac{dQ(t)}{dt}\cdot R\to-\frac{dt}{R\cdot C}=\frac{dQ(t)}{Q(t)}\to-\int_0^t\frac{1}{R\cdot C}dx=\int_0^t\frac{dQ(t)}{Q(t)}\partial x\to-\frac{1}{R\cdot C}\int_0^t dx=\int_0^t\frac{1}{Q(x)}dQ(x)\to$$

$$\to-\frac{t}{R\cdot C}=\log\frac{Q(t)}{Q(0)}\to e^{\frac{-t}{R\cdot C}}=\frac{Q(t)}{Q(0)}\to Q(t)=Q(0)\cdot e^{\frac{-t}{R\cdot C}}$$

Formula per la scarica del condensatore: $\boxed{V(t)=V(0)\cdot e^{\frac{-t}{R\cdot C}}}$

3. Formula generale per tensioni fisse

Nel precedente paragrafo, abbiamo osservato il comportamento del condensatore in fase di carica con una tensione fissa del generatore e in fase di scarica. È possibile esprimere il comportamento del condensatore in entrambi casi con un'unica formula generale. Non solo, la formula generale descrive anche il comportamento in condizioni intermedie, come per esempio la carica di un condensatore inizialmente non completamente scarico, ovvero con una tensione non nulla ai suoi capi nello stadio iniziale della misura.

Riferendoci al circuito in *fig.1*, consideriamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T = aperto \\ V(t=0)=\dfrac{Q(t=0)}{C}>0 \\ E>0 \end{cases}$$

Al momento della chiusura dell'interruttore T valutiamo la variazione delle varie grandezze nel tempo. Applichiamo la legge di ohm per la misura della differenza di potenziale ai capi della resistenza:

$$\textbf{(3)}\qquad E-V(t)=I(t)\cdot R$$

Come sempre $V(t)=\frac{Q(t)}{C}$ e $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$, e sostituendo queste due relazioni nella **(3)**, possiamo ottenere la prima formula generale.

$$E-\frac{Q(t)}{C}=\frac{dQ(t)}{dt}\cdot R\to\frac{E\cdot C-Q(t)}{R\cdot C}=\frac{dQ(t)}{dt}\to\frac{dt}{R\cdot C}=\frac{dQ(t)}{E\cdot C-Q(t)}\to\int_0^t\frac{dx}{R\cdot C}=\int_0^t\frac{1}{E\cdot C-Q(x)}dQ(x)\to$$

$$\to-\frac{1}{R\cdot C}\int_0^t dx=\int_0^t\frac{1}{Q(x)-E\cdot C}dQ(x)\to-\frac{t}{R\cdot C}=\log\left(\frac{Q(t)-E\cdot C}{Q(0)-E\cdot C}\right)\to e^{\frac{-t}{RC}}=\frac{Q(t)-E\cdot C}{Q(0)-E\cdot C}\to$$

$$\rightarrow Q(t) - E \cdot C = (Q(0) - E \cdot C) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \rightarrow Q(t) = E \cdot C + C \cdot \left(\frac{Q(0)}{C} - E \right) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$$

Prima formula generale del condensatore: $\boxed{V(t) = E + (V(0) - E) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}}$

4. Formula generale ampliata per tensioni variabili

La prima formula generale del condensatore, descrive il comportamento del condensatore quando la tensione misurata ai capi del generatore è fissa oppure nulla. A questo punto possiamo estendere la formulazione nei casi di tensioni variabili nel tempo $E(t)$.

Come di consueto, consideriamo condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T = aperto \\ V(t = 0) = V(0) \\ E(t = 0) = E(0) \end{cases}$$

E come sempre, al momento della chiusura dell'interruttore T valutiamo la variazione delle varie grandezze nel tempo, applicando sempre la legge di ohm per la misura della differenza di potenziale ai capi della resistenza:

$$\textbf{(4)} \qquad E(t) - V(t) = I(t) \cdot R$$

Ancora una volta utilizziamo le relazioni $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$ e $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, e le sostituiamo nella **(4)**. A questo punto eseguiamo i passaggi per raggiungere la formula finale.

$$E(t) - \frac{Q(t)}{C} = \frac{dQ(t)}{dt} \cdot R \rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = E(t) \rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{R \cdot C} = \frac{E(t)}{R}$$

Risolviamo l'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine:

$$y'(t) + a(t)y(t) = g(t)$$

$$y(t) = e^{-A(t)} \int g(t) \cdot e^{A(t)} dt + c \cdot e^{A(t)}$$

Nel nostro caso:

$$y(t) = Q(t) \qquad a(t) = \frac{1}{R \cdot C} \qquad A(t) = \frac{t}{R \cdot C} \qquad g(t) = \frac{E(t)}{R}$$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \frac{1}{R} \int E(t) \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} dt + c \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \rightarrow V(t) = e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \int E(t) \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} dt + c \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$$

Avendo come condizione $V(t = 0) = V(0)$, risulta:

$$V(0) = e^{\frac{-0}{R \cdot C}} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \int E(0) \cdot e^{\frac{0}{R \cdot C}} dt + c \cdot e^{\frac{-0}{R \cdot C}} \rightarrow V(0) = \frac{1}{R \cdot C} \int E(0) dt + c \rightarrow c = V(0) - \frac{1}{R \cdot C} \int E(0) dt$$

Prima formula generale del condensatore: $\boxed{V(t) = e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \left[\frac{1}{R \cdot C} \int E(t) \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} dt + V(0) - \frac{E(0)}{R \cdot C} \right]}$

5. Conclusioni

Una delle principali utilità delle formule generali, soprattutto la prima, potrebbe riguardare la risoluzione di svariati tipi di problemi di fisica. Ma uno degli impieghi più interessanti, riguarda certamente l'ottimizzazione di programmi informatici di simulazione elettronica. In quest'ultimo caso la rapidità di calcolo verrebbe certamente migliorata poiché non è necessario implementare troppe formule.