Paradosso dei condensatori e dell’energia mancante.

A cura di *Eugenio Amitrano*

Contenuto dell’articolo:

1. Introduzione 2
2. Descrizione del paradosso 2
3. Dimostrazione 3
4. Conclusioni 4

1. Introduzione

Il presente articolo vuole dimostrare matematicamente l’inesistenza del paradosso dei condensatori e dell’energia mancante, che spesso gli studenti di elettronica incontrano durante il loro percorso di studio.

2. Descrizione del paradosso

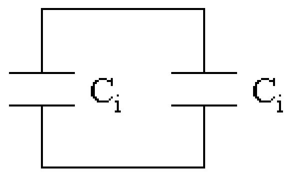
Dati due condensatori di pari capacità C_i, il primo carico, del quale misuriamo ai suoi capi una tensione V_i e il secondo completamente scarico.

L’energia immagazzinata nel condensatore carico, corrisponde al lavoro svolto per caricarlo, ed è data dalla seguente formula:

$$E_i = \frac{1}{2} C_i \cdot V_i^2$$

Cosa succede, quando colleghiamo i due condensatori fra loro?

Da semplici considerazioni fisiche, è facile verificare che:



1) La capacità raddoppia $C_f = 2 \cdot C_i$
2) La tensione dimezza $V_f = \frac{1}{2} V_i$

Se proviamo a calcolare nuovamente l’energia, notiamo qualcosa che non quadra:

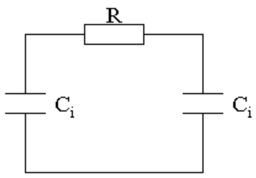
$$E_f = \frac{1}{2} C_f \cdot V_f^2 = \frac{1}{2}(2 \cdot C_i) \cdot \left(\frac{1}{2} V_i\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot C_i \cdot V_i^2 = \frac{1}{2} E_i$$

Visto che idealmente non ho considerato nessuna resistenza, la domanda è che fine ha fatto metà dell’energia iniziale?

Molto spesso ci si accontenta del paradosso, ma la risposta corretta alla precedente domanda è che l’energia mancante, in realtà si è dissipata.

3. Dimostrazione

Consideriamo il seguente circuito.



La potenza elettrica per il calcolo dell'energia dissipata da una resistenza elettrica, istante per istante, è data dalla formula $P(t) = R \cdot I^2(t)$ da cui l'energia dissipata è $W = \int_0^t P(x) \cdot dx = \int_0^t R \cdot I^2(x) \cdot dx$.

$$\textbf{(1)} \qquad \boxed{W = \int_0^t R \cdot I^2(x) \cdot dx}$$

Nel nostro caso reale la corrente ë variabile nel tempo ed è data dalla relazione:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{\partial t} = \frac{d\left[V_i \cdot C_f \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC_f}}\right)\right]}{\partial t} = V_i \cdot C_f \cdot \frac{d\left(1 - e^{-\frac{t}{RC_f}}\right)}{\partial t} = V_i \cdot C_f \cdot \frac{e^{-\frac{t}{RC_f}}}{RC_f} = \frac{V_i}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC_f}}$$

$$\textbf{(2)} \qquad \boxed{I(t) = \frac{V_i}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC_i}}}$$

Considerando che con la presenza della resistenza risulta $C_f = \frac{1}{2} C_i$

Sostituendo la relazione **(2)** nella relazione **(1)**, otteniamo:

$$W = \int_0^t R \cdot I^2(x) dx = \int_0^t R \cdot \left(\frac{V_i}{R} \cdot e^{-\frac{2x}{RC_i}}\right)^2 dx = \frac{V_i^2}{R} \cdot \int_0^t e^{-\frac{4x}{RC_i}} dx = \frac{V_i^2}{R} \cdot \left[-\frac{RC_i}{4} \cdot e^{-\frac{4x}{RC_i}}\right]_0^t = \frac{1}{4} C_i V_i^2 \left(1 - e^{-\frac{4t}{RC_i}}\right)$$

$$\textbf{(3)} \qquad \boxed{W = \frac{1}{4} C_i V_i^2 \left(1 - e^{-\frac{4t}{RC_i}}\right)}$$

Non possiamo calcolare l'intensità di corrente e di conseguenza nemmeno l'energia dissipata per valori di $R = 0$, ma possiamo farlo nel suo intorno.

Osserviamo cosa succede quando i valori di $R \to 0$:

$$W = \lim_{R \to 0} . \frac{1}{4} C_i \cdot V_i^{\,2} \left(1 - e^{-\frac{4t}{RC_i}} \right) = \frac{1}{4} C_i \cdot V_i^{\,2}$$

Quindi l’energia dissipata è sempre $\frac{1}{4} C_i \cdot V_i^{\,2}$.

Come Volevasi Dimostrare.

4. Conclusioni

La dimostrazione del paradosso è di natura puramente matematica. Non sono stati presi in esame i reali effetti fisici e comportamenti del fenomeno.