

# Approfondimento sul paradosso dei condensatori e dell'energia mancante.

A cura di *Eugenio Amitrano e Pasquale Perrotta*  
*Dicembre 2010*

## Contenuto dell'articolo:

<b>TITOLO</b>	<b>PAG</b>
Introduzione . . . . .	2
Sistema pendolo . . . . .	2
Sistema acqua . . . . .	4
Richiami sul paradosso dei condensatori . . . . .	7
Sistema condensatori . . . . .	8
Conclusioni . . . . .	16
Listato programmino di simulazione in QBasic . . . . .	16
Riferimenti . . . . .	18

## Introduzione

Riferendoci al precedente articolo "[Paradosso dei condensatori e dell'energia mancante](#)" (*Rif. 1*), il presente approfondimento vuole mostrare altri aspetti riguardanti il paradosso.

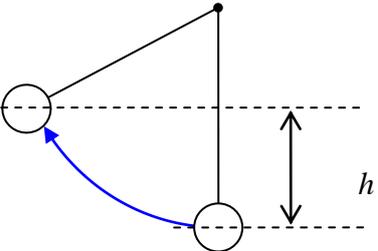
Il motivo principale per cui è possibile cadere nel paradosso, è il fatto che le grandezze in gioco non sono percepite direttamente dai nostri sensi, per cui una percezione non corretta potrebbe farci imbattere in certi trabocchetti paradossali. In altre parole, nelle situazioni più semplici, il paradosso non nasce in quanto siamo in grado di stabilire con facilità il comportamento ideale del sistema a cui ci riferiamo.

Per quanto riguarda i condensatori, vale lo stesso principio. Se riuscissimo ad analizzare bene il comportamento, sia da un punto di vista reale, che ideale, comprenderemo che il paradosso in realtà non esiste.

Prima di analizzare il sistema condensatore, studieremo il comportamento di due sistemi più semplici: Il primo sistema, il pendolo, è molto semplice ed è spesso utilizzato come esempio per descrivere la trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica e viceversa, inoltre il suo comportamento viene intuito naturalmente; Il secondo sistema, l'acqua in un recipiente, invece, un po' meno semplice, si avvicina maggiormente al comportamento delle cariche nei condensatori e per questo, qualcuno potrebbe anche vederci un paradosso energetico.

## Sistema pendolo

Consideriamo un pendolo semplice a riposo, e consideriamo nulla la sua energia potenziale iniziale. Eseguendo un certo lavoro, solleviamo il pendolo ad una certa altezza ( $h$ ) rispetto alla posizione di riposo. Considerando solo il lavoro utile per sollevare il pendolo, possiamo facilmente dedurre che l'energia potenziale acquisita dal pendolo è pari al lavoro svolto per sollevarlo:

	$W$ Lavoro utile svolto per sollevare il pendolo $E_p$ Energia potenziale accumulata $m$ Massa del pendolo $h$ Altezza rispetto allo stato di riposo $g$ Accelerazione di gravità
$W = E_p = m \cdot g \cdot h$	

Cosa succede quando lascio cadere il pendolo?

In condizioni reali, presenza di aria, filo di ancoraggio non perfettamente anelastico, ecc., si intuisce facilmente che il pendolo prima o poi si fermerà, in quanto l'energia del sistema verrà gradualmente dissipata dai fattori precedentemente elencati.

Intendiamo per *energia del sistema* la sua energia meccanica, cioè la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

$$E = E_p + E_c = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

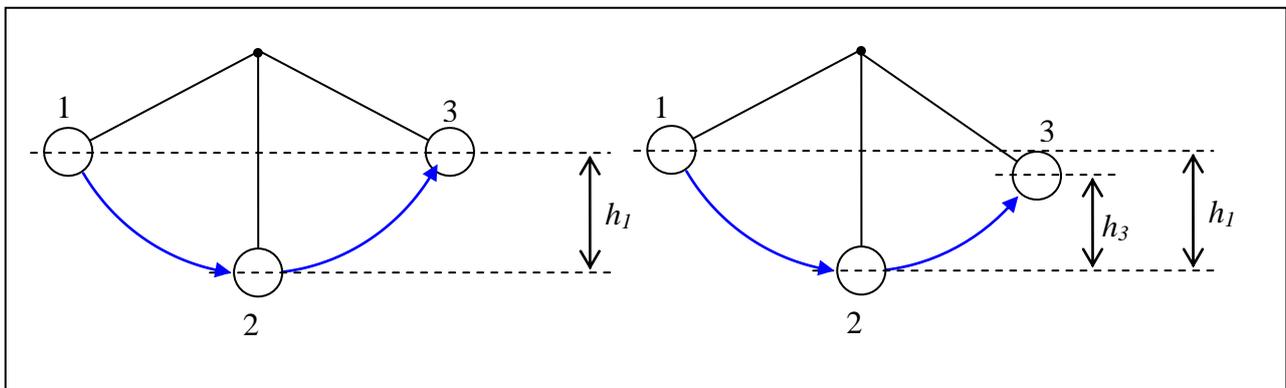
In condizioni ideali, cioè quando è assente ogni causa di dissipazione, l'energia meccanica del sistema resta intatta, quindi ci ritroveremo ad osservare il pendolo oscillare per l'eternità senza perdere un colpo.

Osserviamo più in dettaglio questo fenomeno.

Nel nostro caso, gli unici parametri variabili dell'energia meccanica sono l'altezza  $h$  e la velocità  $v$  del pendolo, mentre la massa  $m$  e l'accelerazione gravitazionale  $g$  restano costanti.

### Caso Ideale

### Caso Reale



Analizziamo i tre istanti indicati nelle due figure:

1. Nell'istante iniziale, cioè nell'istante in cui lasciamo cadere il pendolo, l'energia del sistema è interamente rappresentata dall'energia potenziale acquisita inizialmente, ed è la stessa sia per il caso ideale che per quello reale. Infatti, nel caso reale non c'è ancora stata occasione di dissiparla.

$$E_1(\text{reale}) = E_1(\text{ideale}) = m \cdot g \cdot h_1$$

2. Quando il pendolo raggiunge la posizione di riposo, l'energia potenziale, ora nulla, si è interamente trasformata in energia cinetica.

Nel caso ideale l'energia non si è dissipata:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(\text{ideale}) = m \cdot g \cdot h_1 \quad v(\text{ideale}) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

Mentre nel caso reale si è dissipata:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(\text{reale}) < m \cdot g \cdot h_1 \quad v(\text{reale}) < \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

3. Man mano che il pendolo conquista altezza perde velocità fino a che il pendolo si ferma e in quest'istante ha trasformato tutta la sua energia cinetica in energia potenziale.

Come al punto precedente, nel caso ideale l'energia non si è dissipata:

$$E_3(\text{ideale}) = m \cdot g \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(\text{ideale}) \quad \text{Tesi: } E_3(\text{ideale}) = E_2(\text{ideale}) = E_1(\text{ideale})$$

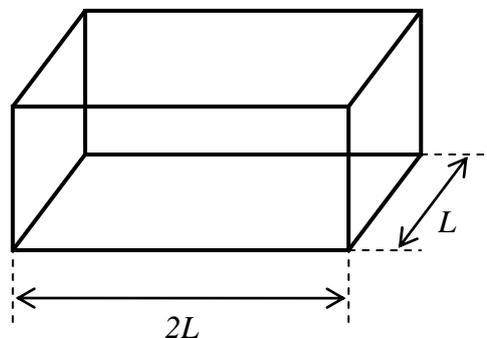
Mentre nel caso reale, si è dissipata come di consueto:

$$E_3(\text{reale}) = m \cdot g \cdot h_3 < \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(\text{reale}) \quad \text{Tesi: } E_3(\text{reale}) < E_2(\text{reale}) < E_1(\text{reale})$$

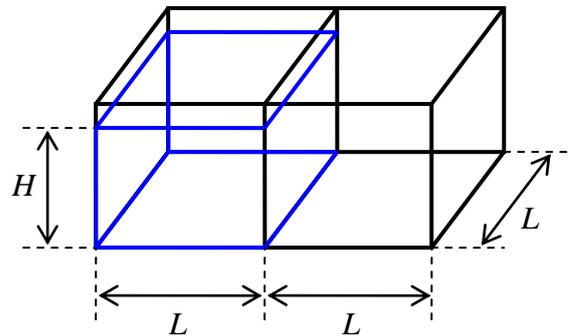
Quindi, come facilmente è stato intuito inizialmente, possiamo affermare che nel caso reale, prima o poi, le oscillazioni del pendolo avranno fine.

## Sistema acqua

Prendiamo in esame un recipiente a base rettangolare di dimensioni  $L$  e  $2L$ :

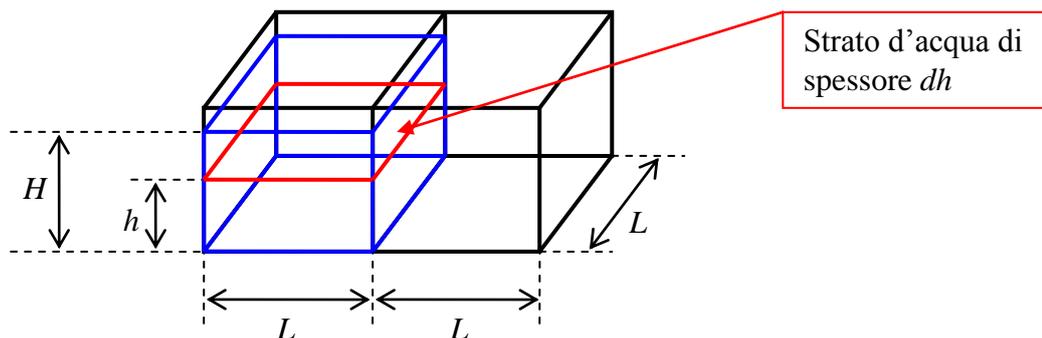


Introduciamo nel recipiente un separatore che lo divide esattamente in due parti uguali e versiamo dell'acqua in una delle due parti fino ad un'altezza  $H$ :



Calcoliamo ora l'energia potenziale dell'acqua:

Prediamo in esame, per ogni altezza relativa  $h$ , uno strato orizzontale di acqua di spessore  $dh$ . Lo spessore è così piccolo da avere in tutte le parti dello strato d'acqua lo stesso potenziale gravitazionale:



Strato d'acqua di spessore  $dh$

Il volume dello strato d'acqua è  $V = L \cdot L \cdot dh = L^2 \cdot dh$  e indicando con  $\rho$  la sua densità, la massa dello strato d'acqua sarà  $m = V \cdot \rho = L^2 \cdot \rho \cdot dh$ . Infine, l'energia potenziale dello strato d'acqua è  $e(h) = m \cdot g \cdot h = L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dh$ .

Possiamo ora ricavare l'energia potenziale del sistema integrando gli strati di ogni altezza da 0 ad  $H$ :

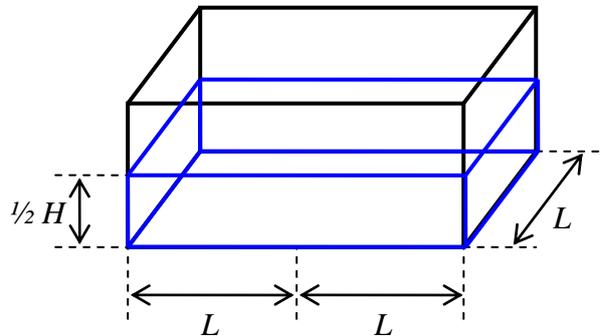
$$E_1 = \int_0^H e(h) = \int_0^H L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dh = L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_0^H h \cdot dh = \frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2$$

Energia potenziale iniziale del sistema:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2$$

Quando rimuoviamo il separatore centrale, trascurando ovviamente le forze di coesione e di adesione, noteremo che l'acqua si adagia sull'intera superficie del

recipiente. Occupando lo stesso volume e raddoppiando la superficie, il livello dell'acqua scenderà fino ad  $\frac{1}{2}H$ :



Analogamente alla condizione precedente, proviamo a calcolare l'energia potenziale:

Ora, il volume dello strato d'acqua è  $V = 2 \cdot L \cdot L \cdot dh = 2 \cdot L^2 \cdot dh$  mentre la massa  $m = 2 \cdot L^2 \cdot \rho \cdot dh$ . L'energia potenziale dello strato d'acqua è  $e(h) = 2 \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dh$ .

Possiamo quindi ricavare l'energia potenziale del sistema integrando gli strati di ogni altezza da 0 ad  $\frac{1}{2}H$ :

$$E_2 = \int_0^{\frac{1}{2}H} e(h) = \int_0^{\frac{1}{2}H} 2 \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot dh = 2 \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_0^{\frac{1}{2}H} h \cdot dh = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2}H\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2$$

Energia potenziale finale del sistema:

$$E_2 = \frac{1}{4} \cdot L^2 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2$$

Confrontando  $E_1$  con  $E_2$  vediamo che qualcosa non quadra, infatti, risulta  $E_2 = \frac{1}{2}E_1$ .

A questo punto la domanda è: “Che fine ha fatto metà dell'energia potenziale iniziale?”

La risposta è semplice. Inizialmente, come per il pendolo, l'energia mancante si è convertita in energia cinetica. Facendo una prova pratica si può notare come l'acqua acquisti una certa cinetica ed inoltre come il livello dell'acqua non sia uniforme.

Nel caso reale, il moto man mano rallenterà fino a scomparire raggiungendo così lo stato di riposo descritto poc'anzi, mentre l'energia meccanica in eccesso verrà convertita in energia termica per i continui urti tra molecole, con il recipiente e con

l'aria; parte dell'energia sarà trasferita anche all'aria sotto forma di energia cinetica, e in altre forme minori.

Nel caso ideale, invece l'energia meccanica si conserva, infatti, sommando in ogni momento l'energia potenziale totale e l'energia cinetica avremmo sempre lo stesso valore iniziale.

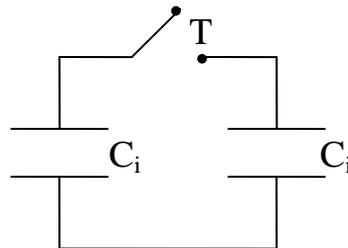
## Richiami sul paradosso dei condensatori

Dati due condensatori di pari capacità  $C_i$ , il primo carico, del quale misuriamo ai suoi capi una tensione  $V_i$  e il secondo completamente scarico.

L'energia immagazzinata nel condensatore carico corrisponde al lavoro svolto per caricarlo, ed è data dalla seguente formula:

$$E_i = \frac{1}{2} C_i \cdot V_i^2$$

Cosa succede, quando colleghiamo i due condensatori fra loro?



Da semplici considerazioni fisiche, è facile verificare che al momento della chiusura dell'interruttore T:

- 1) La capacità raddoppia  $C_f = 2 \cdot C_i$
- 2) La quantità di carica resta invariata per cui la tensione dimezza  $V_f = \frac{1}{2} V_i$

Se proviamo a calcolare nuovamente l'energia, notiamo qualcosa che non quadra:

$$E_f = \frac{1}{2} C_f \cdot V_f^2 = \frac{1}{2} (2 \cdot C_i) \cdot \left( \frac{1}{2} V_i \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot C_i \cdot V_i^2 = \frac{1}{2} E_i$$

Visto che idealmente non si è considerata nessuna resistenza, la domanda è: “Che fine ha fatto metà dell'energia potenziale iniziale”?

## Sistema condensatori

Come per i sistemi precedenti (pendolo e acqua), distinguiamo 2 casi:

### Caso reale:

In questo caso non è possibile escludere una resistenza seppur di valore infinitesimo, così una metà dell'energia si trasforma in energia termica, per effetto Joule, qualsiasi sia il valore della resistenza. Questo fenomeno è stato ampiamente descritto nell'articolo precedente "[Paradosso dei condensatori e dell'energia mancante](#)".

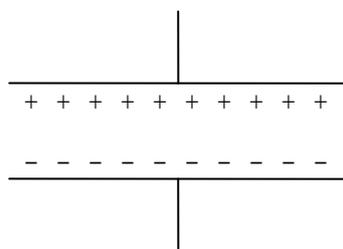
In definitiva, se andiamo a misurare l'energia potenziale finale questa risulterà la metà di quella iniziale. La dissipazione avviene sempre attraverso un effetto radiativo, come ad esempio l'effetto joule attraverso la resistenza o la radiazione mediante induttore. Per approfondire, vedi "*Paradosso dei condensatori*" nel "[Modulo-7](#)" del "[Manuale di divulgazione scientifica](#)" di V.Iorio)

### Caso ideale:

Siamo giunti al punto fondamentale dell'articolo.

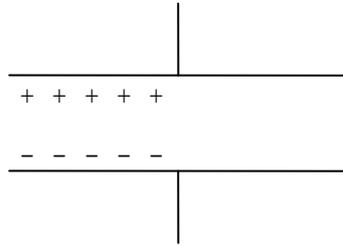
Essendo l'energia potenziale elettrostatica una funzione di stato, cioè che non interpreta nelle sue formule il percorso effettuato per raggiungere uno stato particolare (*Legge di Hess*), come è possibile che ne risulti dimezzata in un trasferimento di cariche? La risposta è che escludendo ogni forma di dissipazione, l'energia mancante si conserva nel sistema sottoforma di energia cinetica. Paradossalmente, utilizzando la formulazione matematica nella quale si descrive che l'energia in un condensatore è immagazzinata solo sottoforma di energia potenziale elettrostatica, l'energia calcolata risulta effettivamente dimezzata.

Per semplicità, consideriamo il condensatore a piastre parallele:



Se in un condensatore di capacità  $C$  è presente una quantità  $Q$  di carica, la tensione che andremo a misurare ai suoi capi è descritta dalla formula  $V = \frac{Q}{C}$ .

Proviamo ad eliminare la metà delle cariche dal condensatore  $\left(\frac{1}{2}Q\right)$  e fermiamo il tempo, cioè non diamo il tempo alle cariche rimanenti sulle piastre di ridistribuirsi sulla superficie:

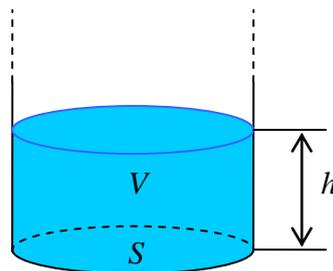


Stando alle relazioni descritte poc'anzi, dovremmo pensare che la nuova tensione misurata ai capi del condensatore sia  $V = \frac{1}{2} \frac{Q}{C}$ , quindi metà di quella iniziale.

Osservando bene la figura, in realtà la ddp misurata ai capi del condensatore dovrebbe essere invariata rispetto alla condizione iniziale (prima della rimozione di metà delle cariche), e dovrebbe esserlo fino a quando le cariche manterranno quella posizione.

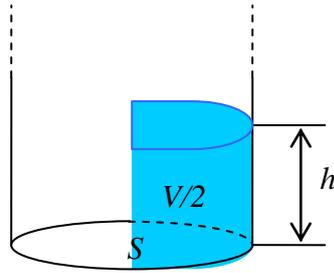
A conferma di ciò, possiamo associare il condensatore ad un serbatoio idrico, in cui:

- La quantità di carica corrisponde alla quantità (volume) d'acqua contenuta nel serbatoio;
- La capacità del condensatore corrisponde alla superficie di base del serbatoio;
- La tensione ai capi del condensatore corrisponde al livello dell'acqua nel serbatoio.



Dalle formule studiate in geometria è evidente che il livello dell'acqua corrisponde al rapporto tra volume dell'acqua e la superficie del serbatoio:  $h = \frac{V}{S}$ .

Proviamo ad eliminare dal lato del serbatoio la metà dell'acqua presente, e fermiamo il tempo vediamo che la formula utilizzata non va più bene.



In questo caso, anche se il volume dell'acqua si è dimezzato, il livello rimane invariato, eppure se utilizziamo la formula anzidetta  $h = \frac{V}{S}$ , il livello risulta dimezzato.

Infatti, la formula descrive il livello corretto, solo quando l'acqua si sarà adagiata su tutta la superficie, così nel condensatore, la formula  $V = \frac{Q}{C}$  fornisce il risultato corretto della ddp solo quando le cariche sono distribuite uniformemente sulla superficie delle piastre.

Nel caso dell'acqua, per calcolare correttamente il livello basta sostituire al posto della superficie di base del serbatoio, la superficie effettivamente occupata dalla colonna d'acqua. Analogamente nel condensatore al posto della capacità dobbiamo utilizzare un'altra grandezza.

A tal proposito, introduciamo il concetto di “**capacità dinamica**” che indicheremo con  $C_{din}$ .

Il valore della capacità di un condensatore, calcolato mediante le sue caratteristiche fisiche, è dato dalla formula  $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ , dove  $A$  è la superficie totale delle piastre.

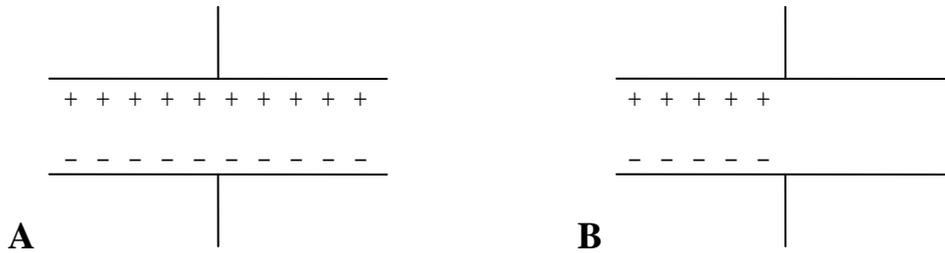
La capacità dinamica invece, per quanto riguarda la superficie, non tiene conto della superficie fisica delle piastre, ma solo di quella effettivamente occupata dalle cariche ( $A_{eff}$ ). Per cui la formula diventa :

$$C_{din} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A_{eff}}{d}$$

Se indichiamo con  $f$  la frazione di superficie occupata dalle cariche  $f = \frac{A_{eff}}{A}$ , possiamo scrivere:

$$C_{din} = f \cdot C$$

Confrontiamo ora le tensioni calcolate nel caso A e nel caso B della figura seguente, utilizzando sia una formulazione standard che una formulazione alternativa che tiene conto della capacità dinamica.



**Caso A:** ( $A_{eff} = A$ )

Formulazione standard:

$$V_A = \frac{Q_A}{C}$$

Formulazione alternativa:

$$V_A = \frac{Q_A}{C_{din}}, \quad C_{din} = f \cdot C = \frac{A_{eff}}{A} \cdot C = C, \quad V_A = \frac{Q_A}{C}$$

**Caso B:** ( $A_{eff} = \frac{1}{2}A$ ,  $Q_B = \frac{1}{2}Q_A$ )

Nel caso B, come abbiamo visto prima, deve risultare  $V_B = V_A$ .

Formulazione standard:

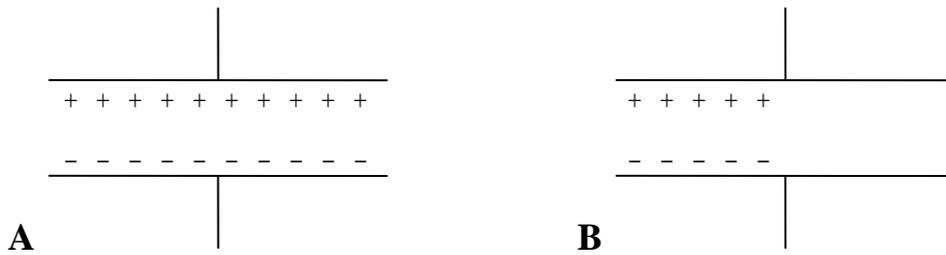
$$V_B = \frac{Q_B}{C} = \frac{\frac{1}{2} \cdot Q_A}{C} = \frac{1}{2} V_A \quad \text{errato!}$$

Formulazione alternativa:

$$V_B = \frac{Q_B}{C_{din}}, \quad Q_B = \frac{1}{2} Q_A, \quad C_{din} = f \cdot C = \frac{A_{eff}}{A} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot C, \quad V_B = \frac{\frac{1}{2} Q_A}{\frac{1}{2} C} = \frac{Q_A}{C} = V_A \quad \text{corretto!}$$

La formulazione alternativa, quindi, oltre a calcolare correttamente la ddp in condizioni standard, risulta efficace anche in condizioni non standard.

L'utilizzo della capacità dinamica ha implicazioni anche nel calcolo dell'energia immagazzinata nel condensatore, per cui riprendiamo il caso A e il caso B per valutare queste differenze:



**Caso A:** ( $A_{eff} = A$ )

Formulazione standard:

$$E_A = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_A^2, \quad V_A = \frac{Q_A}{C}, \quad E_A = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \frac{Q_A}{C} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_A^2}{C}$$

Formulazione alternativa:

$$E_A = \frac{1}{2} \cdot C_{din} \cdot V_A^2, \quad V_A = \frac{Q_A}{C_{din}}, \quad E_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_A^2}{C_{din}}, \quad C_{din} = f \cdot C = C, \quad E_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_A^2}{C}$$

**Caso B:** ( $A_{eff} = \frac{1}{2}A, Q_B = \frac{1}{2}Q_A$ )

Formulazione standard:

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_B^2, \quad V_B = \frac{Q_B}{C} = \frac{\frac{1}{2} \cdot Q_A}{C} = \frac{1}{2} V_A, \quad E_B = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \frac{1}{2} V_A \right)^2 = \frac{1}{8} \cdot C \cdot V_A^2$$

Formulazione alternativa:

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot C_{din} \cdot V_B^2, \quad C_{din} = f \cdot C = \frac{1}{2} \cdot C, \quad V_B = \frac{Q_B}{C_{din}} = \frac{\frac{1}{2} Q_A}{\frac{1}{2} C} = \frac{Q_A}{C} = V_A,$$

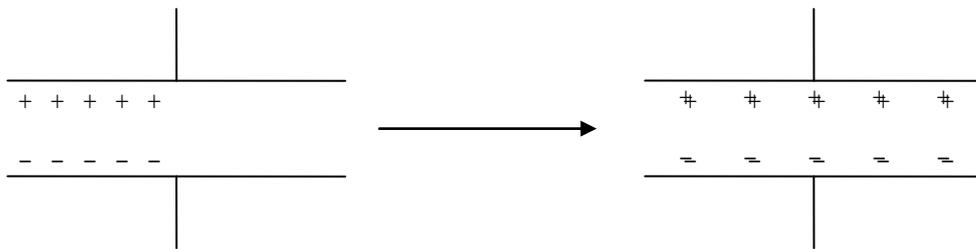
$$E_B = \frac{1}{2} \cdot C_{din} \cdot V_A^2 = \frac{1}{4} \cdot C \cdot V_A^2$$

Dalla formulazione standard risulta  $E_B = \frac{1}{4} \cdot E_A$  mentre dalla formulazione alternativa risulta  $E_B = \frac{1}{2} \cdot E_A$ .

Ad avvalorare la tesi energetica risultante dalla formulazione alternativa, è possibile realizzare una simulazione del comportamento delle cariche su una superficie,

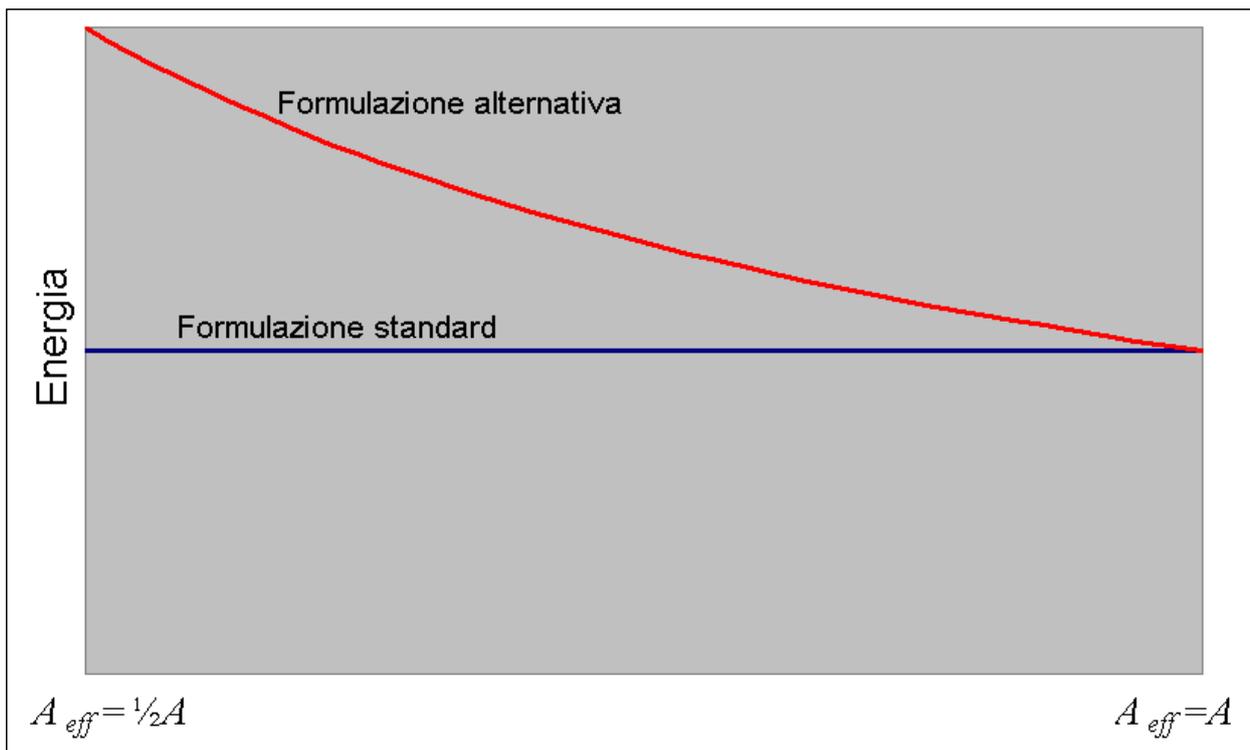
tenendo conto esclusivamente delle leggi meccaniche che regolano il campo elettrico (**Rif. 2**).

Nella simulazione, partendo da una situazione analoga al caso B, cioè un insieme di cariche puntiformi vincolate a metà superficie e che successivamente vengono lasciate libere di muoversi rispondendo alla forza di Coulomb esercitata su di esse, si nota che una volta che la carica totale si è distribuita circa uniformemente sull'intera superficie, le cariche mantengono una certa quantità di moto, con un movimento simile al moto browniano.

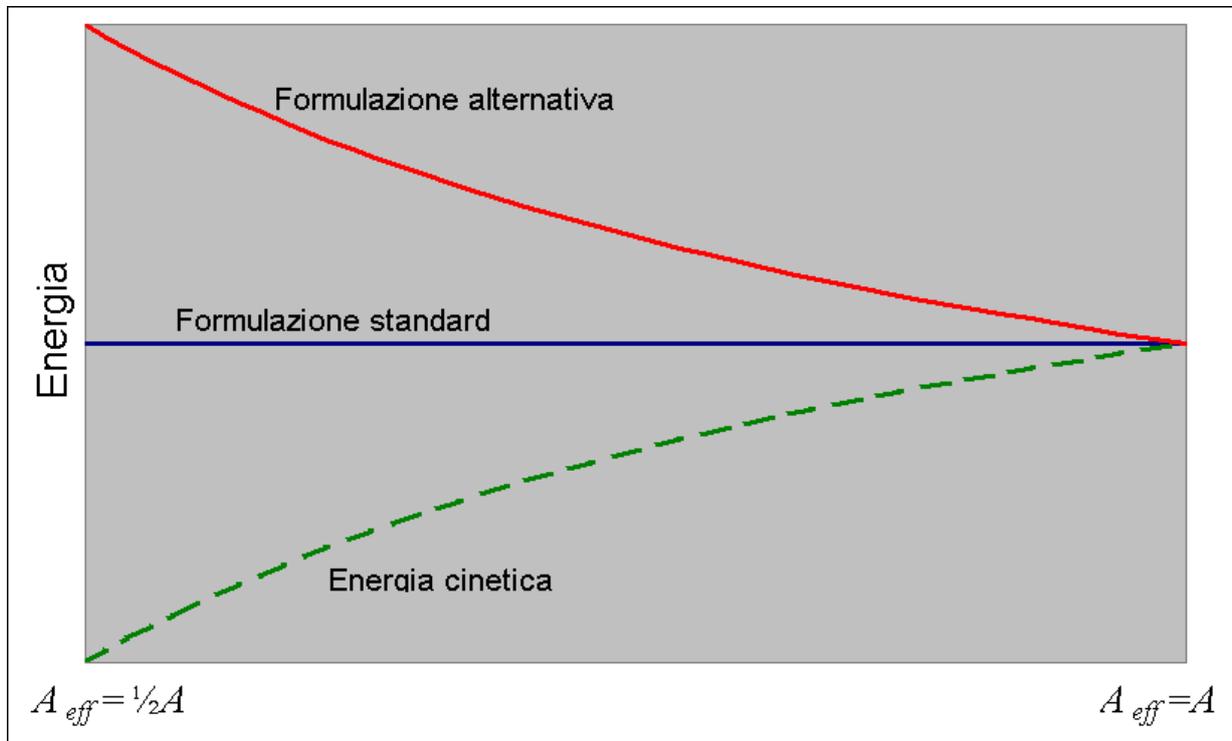


Questo fenomeno ci induce a pensare che le cariche oltre a possedere un'energia potenziale, possiedano anche una certa energia cinetica che la formulazione alternativa ci suggerisce essere pari all'energia potenziale.

Osserviamo di seguito il grafico dell'energia potenziale immagazzinata nel condensatore con entrambe le formulazioni, mano a mano che l'area effettiva occupata dalle cariche ( $A_{eff}$ ) passa da  $\frac{1}{2}A$  ad  $A$ :



Da questo grafico è presumibile pensare che l'energia cinetica acquisita dalle cariche derivi dalla diminuzione dell'energia potenziale:



In questo passaggio l'energia totale è sempre la stessa. Prima, è solo energia potenziale, mentre dopo, metà rimane sottoforma di energia potenziale e metà sottoforma di energia cinetica. È proprio quest'energia cinetica che nel caso reale viene dissipata sottoforma di radiazione elettromagnetica, infatti, la velocità che acquistano le particelle potrebbe altro non essere che la maggiorazione di velocità di agitazione termica, dalla quale è possibile calcolare anche la variazione di temperatura attraverso la formula di Boltzman.

A questo punto possiamo definire una nuova grandezza, l'**energia totale** immagazzinata in un condensatore, data dalla somma dell'energia potenziale in formulazione alternativa e dell'energia cinetica delle cariche elettriche.

Energia potenziale (formula alternativa):

$$E_{\text{potenziale}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{din}}}$$

Energia cinetica (*somma energia cinetica di tutte le cariche*):

$$E_{\text{cinetica}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_i^2$$

$n$  è il numero delle cariche elementari,  $m_e$  è la massa della carica elementare,  $v_i$  è la velocità posseduta dalla carica elementare  $i$ .

Sviluppiamo la sommatoria:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_3^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_n^2$$

Possiamo mettere in evidenza  $\frac{1}{2} \cdot m_e$  comune a tutti i termini:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2)$$

Indicando con  $v_m$  la velocità media quadratica, posso scrivere:

$$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2) = n \cdot v_m^2, \text{ per cui } \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot m_e \cdot v_m^2$$

Avendo a disposizione il valore della carica totale e quello della carica elementare, possiamo trovare che il numero di cariche è dato dal seguente rapporto:

$$n = \frac{Q}{q_e}, \text{ dove } q_e \text{ è la carica elementare, per cui } \frac{1}{2} \cdot n \cdot m_e \cdot v_m^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_e}{q_e} \cdot Q \cdot v_m^2.$$

Il rapporto  $\frac{m_e}{q_e}$  è costante poiché sia  $m_e$  che  $q_e$  sono costanti, e chiameremo questo rapporto “**costante di massa carica**” e la indicheremo con  $K_{mq}$ .

$$K_{mq} = \frac{m_e}{q_e} \approx \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 5,69 \cdot 10^{-12} \text{ Kg/C}$$

A questo punto possiamo scrivere che l'energia cinetica nel condensatore è data dalla seguente formula:

$$E_{cinetica} = \frac{1}{2} \cdot K_{mq} \cdot Q \cdot v_m^2$$

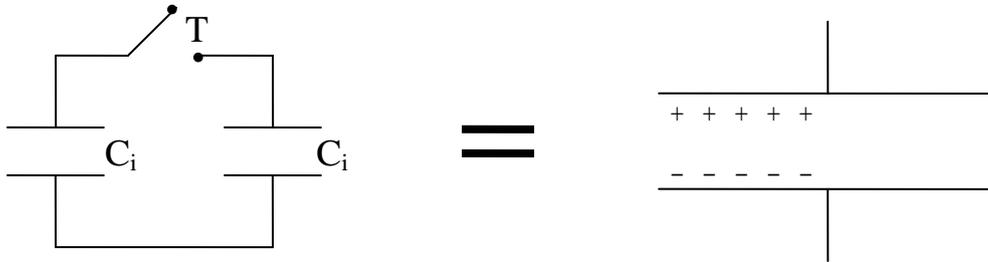
E infine, possiamo scrivere anche la formula dell'energia totale immagazzinata nel condensatore:

$$E_{totale} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{din}} + \frac{1}{2} \cdot K_{mq} \cdot Q \cdot v_m^2$$

Approfondimento sul paradosso dei condensatori e dell'energia mancante.

Le ripercussioni di queste formule alternative sul paradosso sembrano ovvie:

Ad interruttore aperto, il sistema dei condensatori è paragonabile ad un unico condensatore con metà superficie occupata:



A conferma delle formulazioni alternative, possiamo quindi affermare che quando chiudo l'interruttore metà dell'energia potenziale è convertita in energia cinetica.

## Conclusioni

Le formulazioni alternative sono una congettura, in quanto non esistono evidenze sperimentali. Inoltre, esiste una reale difficoltà nel costruire un modello realistico per l'impossibilità di osservare realmente i fenomeni.

Vorrei concludere l'articolo con una domanda: *“Le formulazioni per descrivere l'energia del sistema acqua, sarebbero state costruite altrettanto facilmente se il fenomeno avvenisse un trilione di volte più velocemente?”*.

## Listato programmino di simulazione in QBasic

```
RANDOMIZE TIMER
TITLE$ = "SIMULAZIONE DEL MOVIMENTO DI CARICHE SU UNA SUPERFICIE CONDUTTIVA"
SUBTITLE$ = "Il fenomeno si presenta rallentato di milioni di volte"

'' NUMERO DI CARICHE
CONST N = 50

'' VALORE DA CALIBRARE PER VELOCITA'
CAL = 10 ^ -7

'' INDICI COORDINATE
CONST X = 0, Y = 1, NOFC = 2

'' PI GRECO
CONST PI = 3.141592

'' VETTORE DI COORDINATE
DIM CXY(N, NOFC)

'' VETTORE VELOCITA'
DIM VEL(N, NOFC)
```

## Approfondimento sul paradosso dei condensatori e dell'energia mancante.

```
' ' VETTORE GRAFICO
DIM CARICA(1024)

' ' INIZIALIZZAZIONE VIDEO
SCREEN 12
WINDOW (-1.6, 1.2)-(-1.6, -1.2)
CLS

' ' STAMPA A VIDEO DEL TITOLO
LOCATE 1, 40 - LEN(TITLE$) / 2
PRINT TITLE$
LOCATE 2, 40 - LEN(SUBTITLE$) / 2
PRINT SUBTITLE$

' ' CREAZIONE DELLA BMP DELLA CARICA E CATTURA IMMAGINE
FOR I = 0 TO 6
  CIRCLE (0, 0), 0.002 * (I + 1), 9 + I
NEXT I

GET (-0.03, 0.03)-(-0.03, -0.03), CARICA()
PUT (-0.03, 0.03), CARICA(), XOR

' ' SUPERFICIE DEL CONDUTTORE
LINE (-0.835, 0.835)-(-0.835, -0.835), 14, B

' ' DEFINIZIONE POSIZIONE INZIALE CARICHE
' ' DIRTRIBUITO IN MODO CASUALE SU MEZZA SUPERFICIE
FOR I = 0 TO N - 1
  CXY(I, X) = 0.8 * RND
  CXY(I, Y) = 1.6 * RND - 0.8
  PUT (CXY(I, X) - 0.03, CXY(I, Y) + 0.03), CARICA(), PSET
NEXT I

LOCATE 3, 2
PRINT "Premere un tasto per iniziare la simulazione"
CH$ = INPUT$(1)
LOCATE 3, 2
PRINT " "
CH$ = CHR$(0)

' ' INIZIO SIMULAZIONE
LOCATE 28, 2
PRINT "Premere ESC per terminare."

WHILE (CH$ <> CHR$(27))

  ' ' SE PREMUTO UN TASTO LO RILEVA
  CH$ = INKEY$

  ' ' STAMPA DELLE CARICHE
  FOR I = 0 TO N - 1
    PUT (CXY(I, X) - 0.03, CXY(I, Y) + 0.03), CARICA(), PSET
  NEXT I

  ' ' CALCOLO NUOVE COORDINATE
  FOR I = 0 TO N - 1
    FOR J = 0 TO N - 1
      IF (I <> J) THEN

        ' ' DISTANZE VETTORIALI
        DX = CXY(I, X) - CXY(J, X)
        DY = CXY(I, Y) - CXY(J, Y)

        ' ' TOLLERANZA PER DISTANZE NULLE
        IF DY < 0 AND DY > -0.001 THEN DY = -0.001
        IF DY > 0 AND DY < 0.001 THEN DY = 0.001
        IF DX < 0 AND DX > -0.001 THEN DX = -0.001
        IF DX > 0 AND DX < 0.001 THEN DX = 0.001
```

## Approfondimento sul paradosso dei condensatori e dell'energia mancante.

```
' ' CALCOLO ANGOLO COMPLETO
IF (DX > 0 AND DY > 0) THEN ANGLE = ATN(ABS(DY) / ABS(DX))
IF (DX < 0 AND DY > 0) THEN ANGLE = PI - ATN(ABS(DY) / ABS(DX))
IF (DX < 0 AND DY < 0) THEN ANGLE = PI + ATN(ABS(DY) / ABS(DX))
IF (DX > 0 AND DY < 0) THEN ANGLE = 2 * PI - ATN(ABS(DY) / ABS(DX))

' ' CALCOLO DISTANZA
D = SQR((DX ^ 2) + (DY ^ 2))

' ' CALCOLO FORZA DI REPULSIONE
F = CAL / (D ^ 2) ' ' FUNZIONE INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALLA DISTANZA^2

' ' CALCOLO VETTORE VELOCITA'
VEL(I, X) = VEL(I, X) + F * COS(ANGLE)
VEL(I, Y) = VEL(I, Y) + F * SIN(ANGLE)

END IF

NEXT J

' ' SE LA CARICA URTA LA PARETE INVERTI LA VELOCITA'
IF ((CXY(I, X) + VEL(I, X) < -0.8) OR (CXY(I, X) + VEL(I, X) > 0.8)) THEN VEL(I,
X) = -VEL(I, X)
IF ((CXY(I, Y) + VEL(I, Y) < -0.8) OR (CXY(I, Y) + VEL(I, Y) > 0.8)) THEN VEL(I,
Y) = -VEL(I, Y)

' ' CALCOLO NUOVA POSIZIONE
CXY(I, X) = CXY(I, X) + VEL(I, X)
CXY(I, Y) = CXY(I, Y) + VEL(I, Y)

NEXT I

WEND
```

## Riferimenti

- 1) **Paradosso dei condensatori e dell'energia mancante** – *E.Amitrano*  
Link: <http://www.atuttoportale.it/articoli/fisica/ParadossoCondensatori.doc>
- 2) **Download eseguibile programmino di simulazione** – *E.Amitrano*  
Link: <http://www.atuttoportale.it/articoli/fisica/Cariche.zip>  
[ *Estrarre la cartella ed eseguire il file CARICHE.exe* ]
- 3) **Download Compilatore QBasic** – *Official Web Site*  
Link: <http://www.qb64.net/>