Piccole e grandi differenze tra numeri primi consecutivi

Eventuali e possibili relazioni con l'ipotesi di Riemann

A cura di
Prof. Annarita Tulumello
(http://www.gruppoeratostene.com/)

Con la collaborazione di
Eugenio Amitrano
(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell'articolo:

↔

Abstract

In this paper we show some results on short and large differences between consecutive prime numbers.

Sommario

In questo lavoro tratteremo le piccole e le grandi differenze tra i numeri primi consecutivi, sulla base di vari risultati (Goldson, Pintz e Yldirim), corredati da apposite tabelle e con accenno ad alcuni nostri risultati sui numeri primi gemelli e la congettura di Cramer-Shank (***Rif. 1*** / ***Rif. 2***).

Piccole e grandi differenze

Circa le piccole differenze tra due numeri primi consecutivi ci sono già i noti recenti teoremi: Teorema di Goldstone, Pintz e Yldirim, che brevemente riassumiamo in seguito; invece, circa le grandi differenze tra due numeri primi consecutivi, oltre al nostro lavoro "**Connessione Goldbach – gemelli – Polignac**", già reperibile sul sito http://xoomer.alice.it/stringtheory e un nostro recente articolo "**Proposta di dimostrazione Congettura di Cramer-Shank**" (***Rif. 1***), vorremmo qui aggiungere brevemente qualcosa riguardante la cosiddetta "***Large primes gap conjecture***", ossia "**Differenze tra grandi numeri primi**", specie quando la differenza tra due numeri primi successivi è notevolmente superiore alla frequenza media locale.

I teoremi di Pintz e Yldirim riguardano invece le piccole differenze, quelle inferiori alla frequenza media, ma diamo prima un'occhiata all'articolo "***Piccole differenze tra numeri primi consecutivi***" di BM & L, sul sito http://www.brainmindlife.org/, citando soltanto le possibili connessioni con l'ipotesi di Riemann e con l'ipotesi generalizzata di Riemann (in breve RH e GRH):

SCHEDA TECNICA

Primi gemelli

Due numeri primi, p_n e p_{n+1}, si dicono gemelli se la loro differenza è 2, ovvero se per essi sussiste la relazione:

$$p_{n+1} - p_n = 2$$

Congettura dei primi gemelli

La congettura asserisce che esistono infinite coppie di primi gemelli, ovvero che esistono infiniti n tali che**:**

$$p_{n+1} - p_n = 2$$

dove p_n e p_{n+1} sono rispettivamente l'ennesimo numero primo e il numero primo successivo.

<u>Teoremi fondamentali per lo studio della distribuzione dei primi</u>

1) La media (statistica) di $p_{n+1} - p_n$ è $\log p_n$ (*Teorema dei Numeri Primi*)

2) In virtù del *Teorema dei Numeri Primi* vale la seguente disuguaglianza**:**

$$\boxed{\Delta = \liminf_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} \leq 1}$$

3) Se vale l'*Ipotesi Generalizzata di Riemann*, detto Δ il limite inferiore definito al punto (2), si ha:

$$\Delta < \frac{2}{3}$$ (Hardy e Littlewood nel 1926)

$$\Delta < \frac{3}{5}$$ (Rankin successivamente)

4) Senza far ricorso all'Ipotesi Generalizzata di Riemann, o a qualsiasi altra asserzione non dimostrata, in virtù del *Teorema di Bombieri-Vinogradov* si ha:

$$\Delta \leq \frac{1}{2}$$ (Bombieri e Davenport nel 1966)

$$\Delta \leq 0{,}44254...$$ (Huxley nel 1977)

$$\Delta \leq 0{,}2486...$$ (Maier nel 1986)

<u>Risultati dimostrati da Goldson e Yildirim</u>:

5) Detto Δ il limite definito al punto 2), vale la seguente relazione**:**

$$\Delta = 0$$

6) Detti p_n e p_{n+1} rispettivamente l'n-*esimo* e l'(n+1)-*esimo* numero primo, per infiniti valori di **'n'** sussiste la seguente relazione**:**

$$p_{n+1} - p_n < (\log p_n)^{\frac{8}{9}}$$

Qui ricordiamo che $(\log p_n)^{\frac{8}{9}}$ è inferiore a $\log p_n$, essendo $(\log p_n)^{0,\bar{8}}$ sempre minore della frequenza media $\log p_n$ le differenze tra due numeri primi inferiori alla frequenza media si ripetono infinite volte (***Rif. 1***).

Ad esempio, per i due numeri primi successivi 9.999.931 e 9.999.937 la differenza è 6, e questo valore è inferiore alla stima (1), uguale a

$$(\log p_n)^{\frac{8}{9}} = (\log p_n)^{0,\bar{8}} = (\log 9.999.931)^{0,\bar{8}} = (16,37)^{0,\bar{8}} = 11,70$$

chiaramente inferiore alla frequenza media 16,37. Questo fenomeno si ripete infinite volte al crescere di p_n ma a partire da: $10^{\frac{16,11}{2}} = 10^{8,055} \approx 10^8$, cioè per valori di p_n prossimi all'ordine di grandezza tra 10 e 100 milioni.

Infatti, per $p_n = 9.999.931 \approx 10.000.000 = 10^7$, nel centinaio di unità successive, e quindi tra 10^7 e $10^7 + 100$, ci sono solo soltanto due numeri primi, 10.000.019 e 10.000.079 molto distanti tra loro, (d = 60), nonostante la frequenza media locale sia 16,11 uguale a quella dei numeri primi precedenti. E qui veniamo alle differenze superiori alla frequenza media locale, che, a differenza di quelle minori, sono rare fino a $p_n \approx 10^m$, cioè fino a quando i due numeri sono dello stesso ordine di grandezza, e con frequenza media di circa $2m \approx \log p_n \approx \log 10^m$. Una volta raggiunto quest'ordine di grandezza, la frequenza superiore a $2m$ si ripete infinite volte, mentre prima, come già accennato, è molto rara.

Come si può comprendere dalle seguenti tabelle (premesso che la differenza minima è 2 per i numeri primi gemelli) per p_n e $p_n + 2$ è dalla formula:

$$d = \frac{\log p_n}{m} \text{ se } p_n \approx 10^m$$

Ad esempio, anche se in modo approssimativo (un numero decimale leggermente superiore a 2), abbiamo:

$$p_n \approx 10^7 \qquad d = \frac{\log 10^7}{7} = \frac{16,11}{7} \approx 2,30 \approx 2$$

Vediamo adesso la tabella delle piccole (d), medie (d') e grandi (d'') differenze tra due numeri primi consecutivi prossimi a $p_n \approx 10^m$:

TABELLA n.1

$p_n \approx 10^m$	$d = 2$	$d' \approx \log p_n$	$d'' \approx k \cdot d'$	$k = \frac{d''}{d'}$
10^1 $\log p_n \approx 2{,}3$	$p_n = 5$ $p_{n+1} = 7$ $d = 2$	$p_n = 5$ $p_{n+1} = 7$ $d' = 2 \approx 2{,}3$	$p_n = 7$ $p_{n+1} = 11$ $d'' = 4 \approx 4{,}6$	2
10^2 $\log p_n \approx 4{,}6$	$p_n = 101$ $p_{n+1} = 103$ $d = 2$	$p_n = 103$ $p_{n+1} = 107$ $d' = 4 \approx 4{,}6$	$p_n = 89$ $p_{n+1} = 97$ $d'' = 8 \approx 9{,}2$	2
10^3 $\log p_n \approx 6{,}9$	$p_n = 1019$ $p_{n+1} = 1021$ $d = 2$	$p_n = 1033$ $p_{n+1} = 1039$ $d' = 6 \approx 6{,}9$	$p_n = 1129$ $p_{n+1} = 1151$ $d'' = 22 \approx 25{,}3$	3,67
10^4 $\log p_n \approx 9{,}2$	$p_n = 10007$ $p_{n+1} = 10009$ $d = 2$	$p_n = 10259$ $p_{n+1} = 10267$ $d' = 8 \approx 9{,}2$	$p_n = 9973$ $p_{n+1} = 10007$ $d'' = 34 \approx 39{,}1$	4,25
10^5 $\log p_n \approx 11{,}5$	$p_n = 100151$ $p_{n+1} = 100153$ $d = 2$	$p_n = 102397$ $p_{n+1} = 102407$ $d' = 10 \approx 11{,}5$	$p_n = 101221$ $p_{n+1} = 101267$ $d'' = 46 = 52{,}9$	4,6
10^7 $\log p_n \approx 16{,}1$	$p_n = 9999929$ $p_{n+1} = 9999931$ $d = 2$	$p_n = 9999973$ $p_{n+1} = 9999991$ $d' = 18 \approx 16{,}1$	$p_n = 10000019$ $p_{n+1} = 10000079$ $d'' = 60 \approx 53{,}6$	3,33
...	...	...	...	...

Le grandi differenze d'' si aggirano mediamente attorno ad un multiplo k, di poche unità, rispetto a d'. Nella tabella successiva vedremo le differenze minime ($d = 2$), medie ($d' = 4$) e grandi ($d'' \approx k \cdot d'$) per numeri primi prossimi a $10^2 = 100$. La finalità è quella di mostrare come le grandi differenze (6, 8 e 14) sono più rare delle differenze medie e minime, ricordando che da 2 a 79 ci sono molte differenze $d' = 4$ e $d = 2$.

TABELLA n.2

p_n	p_{n+1}	d	d'	d''	$<=> d'$	k
73	79			6	>	1,5
79	83		4		=	1
83	89			6	>	1,5
89	97			8	>	2
97	101		4		=	1
101	103	2			<	0,5
103	107		4		=	1
107	109	2			<	0,5
109	113		4		=	1
113	127			14	>	3,5
127	131		4		=	1

Si nota che le grandi differenze 6, 8 e 14 emergono in più o meno forte anticipo (specialmente 14) rispetto a numeri prossimi a $p_n \approx 10^{\frac{d''}{2}}$, infatti, 14 è circa la differenza o frequenza media per numeri primi prossimi a $10^{\frac{14}{2}} = 10^7$ poiché $\log 10^7 = 16{,}11 \approx 14$ e $\log_{10} 10^7 = 7$, con frequenza media $2 \times 7 = 14$. Raggiunto tale ordine di grandezza, il numero 14 diventa una nuova frequenza media, e di conseguenza iniziano ad emergere gradualmente differenze maggiori di 14, e cosi via all'infinito.

In breve, possiamo dire che un numero pari d:

- Come differenza di due numeri primi (escluso il numero primo 2) è possibile raramente se esso è superiore al $\log p_n$, in quanto il rapporto probabilistico $r = \dfrac{d}{\log p_n}$ è minore di 1;
- Diventa esso stesso la frequenza media d' quando $r = \dfrac{d'}{\log p_n} \approx 1$;
- Diventa inferiore alla frequenza media, si ripeterà infinite volte al crescere di p_n, così come si ripeterà infinite volte la differenza minima $d = 2$ per i numeri primi gemelli già a partire da numeri primi prossimi a $10^1 = 10$ con frequenza media $2 \approx 2{,}30 = \log 10$, essendo quasi certamente infinite tali coppie di numeri secondo le ultime proposte di dimostrazioni, l'ultima da parte di due matematici cinesi.

Connessioni con la RH e la GRH

Come la congettura dei numeri primi gemelli (con differenza minima $d = 2$) è un sottoproblema della GRH, per la loro infinità, così anche la differenza $p_n - p_n = 0$ si ripete sicuramente infinite volte, infatti, i numeri i numeri primi sono infiniti e la differenza nulla è considerabile un numero pari come tutte le differenze diverse da 2. Questa osservazione, insieme all'altro nostro risultato che un qualsiasi numero pari d diventa infinite volte la frequenza media a partire da numeri primi di grandezza circa $10^{\frac{d}{2}}$, potrebbe essere utile a future considerazioni. Anche le grandi differenze potrebbero essere anch'esse connesse alla GRH e quindi di conseguenza anche all'ipotesi di Riemann classica (RH).

Finora tale problema non è mai stato posto, e su Internet si trova poco materiale.

Su Wikipedia, nella voce "***Ipotesi di Lindelof***" se ne trova un accenno, un'implicazione è stata dimostrata nel 1940 da ***Albert Ingham***:

$$\boxed{p_{n+1} - p_n = (p_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0}$$

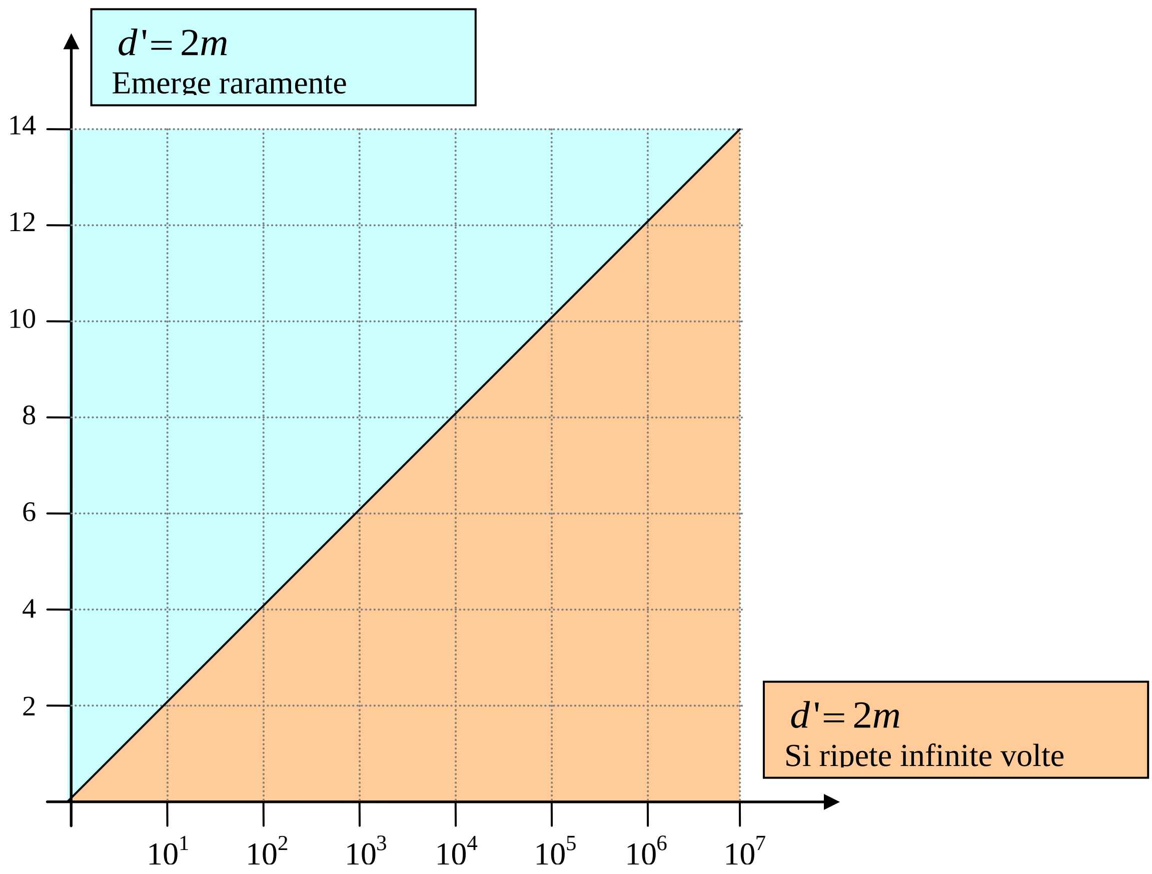
Ancora su Wikipedia, nella voce "***Congettura di Cramer***", si trova che la differenza tra un numero primo e il successivo è:

$$\boxed{p_{n+1} - p_n = O\left(\sqrt{p_n}\log p_n\right)}$$

Questa ipotesi fu dimostrata da Cramer assumendo la validità della RH.

Come abbiamo visto prima, le grandi differenze tra numeri primi sono stimate in piccoli multipli k di $\log p_n$, che con ulteriori ricerche più accurate potrebbero raggiungere il valore di $d'' \approx k \cdot \log p_n = \log p_n \times \log p_n = (\log p_n)^2$ se si pone $k = \log p_n$. Ad esempio, nel caso di $p_n = 10^7$ avremo $16{,}11 \times 16{,}11 = 259{,}53 \approx 260$ numero intero e pari più vicino. In questo caso ($p_n = 10^7$ *vedi Tabella 1*), abbiamo trovato una grande differenza $d'' = 60$, che pur essendo circa quattro volte la frequenza media per numeri prossimi a $p_n = 10^7$, è anche molto inferiore a 260.

Nel seguente grafico, vedremo la relazione tra 10^m e $2m \approx \log p_n \approx \log 10^m$.



Questo grafico indica che il caso dei numeri gemelli con differenza $d = q - p = 2$ rientra in uno degli infiniti casi $d' = q - p = 2m$, e quindi se sono infinite le coppie dei numeri primi gemelli, lo sono anche le coppie con differenza $2m$, anche se tale differenza si ripete infinitamente dopo 10^m (*area arancione del grafico*), ed emerge raramente fino a 10^m (*area azzurra del grafico*).

Per i numeri gemelli, la differenza 2 significa $2m$ di 10^m con $m=1$, quindi $d=2\times 1=2$ che si verifica già due volte entro 10^1 (con le coppie di gemelli 3-5 e 5-7), poi, dopo 10^1 si ripete infinite volte, confermando la congettura dei numeri primi gemelli infiniti, ed è estensibile alla nostra congettura di due numeri primi consecutivi (coppie di Polignac) con differenza $2m$ infiniti, vedi "***Connessione Goldbach – gemelli – Polignac***" citato all'inizio.

Conclusioni

Se i numeri gemelli sono un sottoproblema della GRH (ipotesi generalizzata di Riemann), e a parte i risultati sopra citati di Hardy e Littlewood ecc., anche le coppie di numeri primi consecutivi con differenza $2m$ lo sono; e una soluzione positiva della congettura dei numeri gemelli (una nostra proposta ***Rif. 2***) sarà valida anche per le suddette altre coppie di Polignac, con differenza $2m$.

Quindi, quanto sopra esposto è utile alla dimostrazione sia della congettura dei numeri gemelli, sia della congettura dei numeri di Polignac e infine sia della GRH (e di conseguenza anche dell'ipotesi di Riemann classica). Ricordiamo che le coppie di Polignac sono un sottoproblema della RH, come il Teorema dei numeri Primi (già dimostrato da Hadamard e da De la Valle–Poussin), o il teorema di Miller–Rabin su un test di primalità (anche questo dimostrato), la congettura debole di Goldbach di abbiamo proposto una soluzione (vedi lavori su Goldbach pubblicati sul sito del ***gruppo Eratostene*** e sul sito http://xoomer.alice.it/string/teory, da vedere anche "***Possibili relazioni tra le sei congetture principali sui numeri primi***" nella rubrica "***Non solo stringhe***" del suddetto sito).

Questo lavoro sui numeri gemelli e di Polignac è un altro piccolo contributo all'eventuale futura dimostrazione della congettura di Riemann tramite i suoi sottoproblemi dei numeri gemelli, di Polignac e generalizzazione dei numeri gemelli. Altri nostri contributi sono invece basati sulla dimostrazione della variante di Lagarias RH1 = RH (*Nardelli / Di Noto*), anch'essi pubblicato sul sito del Gruppo Eratostene, oltre che su un sito dell'Università inglese di Exeter, insieme ad altri lavori su altre proposte di dimostrazioni dell'ipotesi di Riemann, a cura del matematico Prof. ***Mattew Atkins***:

1. http://www.secamlocal.ex.ac/uk/people/staff/mrwatkin/zeta/Rh proofs/htm

2. http://www.xoomer.alice.it/stringtheory

Riferimenti

1. "**Proposta di dimostrazione della Congettura di Cramer-Shank**" – R.Turco, M.Colonnese, M.Nardelli, G.Di Maria, F.Di Noto, A.Tulumello – ***Gruppo Eratostene***, "Articoli sulla teoria dei numeri"

2. "**I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata con accenno al problema P = NP**" – F.Di Noto, A.Tulumello, M.Nardelli, G.Di Maria, – ***Gruppo Eratostene***, "Articoli su Riemann"