Metodo empirico per la determinazione di una delle soluzioni delle equazioni di grado n.

A cura di Eugenio Amitrano

Contenuto dell'articolo:

1. Introduzione-

Il presente articolo vuole fornire un metodo empirico per determinare una delle soluzioni di grado n.

2. Descrizione

Data una generica equazione algebrica di grado n:

(1) $$\boxed{x^n = c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + c_n}$$

Sia $(S_k)_{\forall k \in N_0}$ una serie è definita nel seguente modo:

(2) $$\boxed{\begin{cases} S_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot S_{k-i} & \forall k \geq n \\ S_k = 1 & \forall k < n \end{cases}}$$

È possibile affermare che una soluzione dell'equazione è data dalla seguente relazione:

(3) $$\boxed{x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}}}$$

3. Dimostrazione

Hp: $x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}}$

Th: $x^n = c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + c_n$

A partire dall'Hp, è facile verificare la validità delle seguenti due relazioni:

a) $x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}} = \lim_n \frac{S_{k-t}}{S_{k-t-1}} \qquad \forall t \in N_0$

b) $\lim_k \frac{S_k}{S_{k-t}} = x^t \qquad \forall t \in N_0$

Partiamo dall'Hp:

$$x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}} = \lim_k \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot S_{k-i}}{S_{k-1}} = \lim_k \frac{c_1 \cdot S_{k-1} + c_2 \cdot S_{k-2} + \ldots + c_n \cdot S_{k-n}}{S_{k-1}} =$$

$$= c_1 \cdot \lim_k \frac{S_{k-1}}{S_{k-1}} + c_2 \cdot \lim_k \frac{S_{k-2}}{S_{k-1}} + \ldots + c_n \cdot \lim_k \frac{S_{k-n}}{S_{k-1}} = c_1 + c_2 \cdot \frac{1}{x} + \ldots + c_n \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$$

Quindi

$x = c_1 + c_2 \cdot \frac{1}{x} + \ldots + c_n \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$ da cui $x^n = c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + c_n$

Come Volevasi Dimostrare.

4. Esempi

- *Esempio 1:*

Equazione: $x^2 = x + 1$

Sviluppo della serie $\begin{cases} S_k = S_{k-1} + S_{k-2} & \forall k \geq n \\ S_k = 1 & \forall k < n \end{cases}$

k	***S_k***	***S_k / S_{k-1}***
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	1.5
4	5	1.666666667
…	…	…
25	121393	1.618033989
26	196418	1.618033989
27	317811	1.618033989
28	514229	1.618033989
29	832040	1.618033989
…	…	…

$x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}} \approx 1{,}618033989$

- ***Esempio 2:***

Equazione: $x^2 = -3x - 2$

Sviluppo della serie $\begin{cases} S_k = -3 \cdot S_{k-1} - 2 \cdot S_{k-2} & \forall\, k \geq n \\ S_k = 1 & \forall\, k < n \end{cases}$

K	**S_k**	**S_k / S_{k-1}**
0	1	
1	1	1
2	-5	-5
3	13	-2.6
4	-29	-2.230769231
…	…	…
25	67108861	-2.000000089
26	-134217725	-2.000000045
27	268435453	-2.000000022
28	-536870909	-2.000000011
29	1073741821	-2.000000006
…	…	…

$$x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}} \approx -2$$

- ***Esempio 3:***

Equazione: $x^3 = x^2 + x + 1$

Sviluppo della serie $\begin{cases} S_k = S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-3} & \forall\, k \geq 3 \\ S_k = 1 & \forall\, k < 3 \end{cases}$

k	**S_k**	**S_k / S_{k-1}**
0	1	
1	1	1
2	1	1
3	3	3
4	5	1.666666667
…	…	…
25	1800281	1.839286754
26	3311233	1.839286756
27	6090307	1.839286755
28	11201821	1.839286755
29	20603361	1.839286755
…	…	…

$$x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}} \approx 1{,}839286755$$

5. Casi particolari

Nel caso in cui la soluzione ricercata dovesse risultare complessa, possiamo notare che il $\lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}}$ non è regolare.

- *Esempio:*

Equazione: $x^2 = -2x - 3$

Sviluppo della serie $\begin{cases} S_k = -2 \cdot S_{k-1} - 3 \cdot S_{k-2} & \forall k \geq n \\ S_k = 1 & \forall k < n \end{cases}$

k	S_k	S_k / S_{k-1}
0	1	
1	1	1
2	-5	-5
3	7	-1.4
4	1	0.142857143
…	…	…
25	-1525679	-5.253697473
26	2180155	-1.428973591
27	216727	0.099408987
28	-6973919	-32.17835803
29	13297657	-1.906769637
…	…	…

$x = \lim_k \frac{S_k}{S_{k-1}}$ (*non regolare*)

6. Conclusioni

Il metodo presentato in questo articolo vuole fornire un punto di vista alternativo per le equazioni di grado n, mettendo in risalto una loro caratteristica non convenzionale.