L’Ultimo teorema di Fermat e le terne Pitagoriche

Aspetto aritmetico e geometrico

A cura di

Francesco Di Noto
Eugenio Amitrano

(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell’articolo:

↔

- **Abstract**

In this paper, we show an arithmetic and geometry property of Fermat's last theorem by powers greater than two applied to Pythagorean triples.

- **Introduzione**

In questo lavoro didattico è illustrato un aspetto aritmetico e geometrico dell'ultimo teorema di Fermat attraverso potenze maggiori di due applicate alle terne pitagoriche.

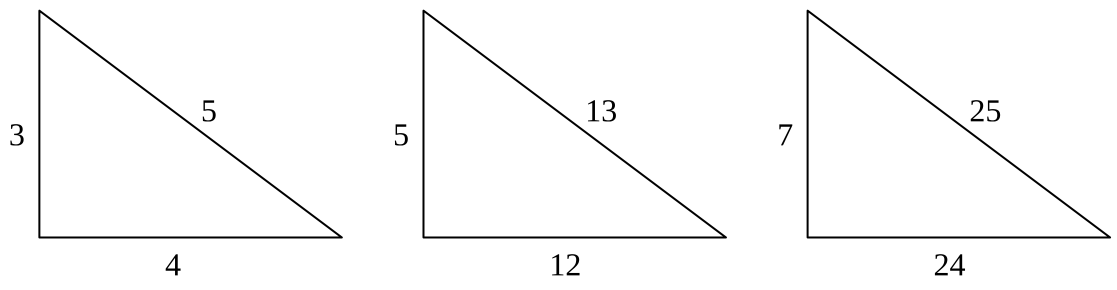
- **Terne Pitagoriche**

Le terne di numeri naturali (a,b,c) per le quali vale l'eguaglianza $a^2+b^2=c^2$ si dicono "Terne Pitagoriche".

Ad esempio le terne $(3,4,5)$, $(5,12,13)$ e $(7,24,25)$ sono pitagoriche, infatti:

- $3^2+4^2=5^2$ $\quad$ $3^2+4^2=9+16=25$ $\quad$ $5^2=25$
- $5^2+12^2=13^2$ $\quad$ $5^2+12^2=25+144=169$ $\quad$ $13^2=169$
- $7^2+24^2=25^2$ $\quad$ $7^2+24^2=49+576=625$ $\quad$ $25^2=625$

Per il teorema di Pitagora, il quale afferma che "*In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti.*", se i tre lati di un triangolo rettangolo sono interi allora la terna formata dalla misura dei tre lati è una terna pitagorica. Infatti, la virtù pitagorica di queste terne prende il nome proprio dal teroema appena citato.



Esistono infinite terne pitagoriche ed Euclide formulò una regola generatrice per determinare appunto infinite terne di questo tipo:

$(m^2-n^2,\quad 2mn,\quad m^2+n^2)$ è una terna pitagorica se $(m,n\in N)\wedge(m>n)$

- **L'ultimo teorema di Fermat**

L'ultimo teorema di Fermat prende il nome dal matematico e magistrato francese Pierre de Fermat che nell'anno 1637 ne formulò l'ipotesi e cioè che non esistono soluzioni all'equazione diofantea $a^n + b^n = c^n$ quando n è maggiore di 2.

É facile comprendere che se $n = 2$ esistono infinite soluzioni dell'equazione $a^2 + b^2 = c^2$ che sono appunto le terne pitagoriche.

Questo teorema è divenuto celebre grazie al fatto di essere rimasto indimostrato per oltre 3 secoli. Nomi come Eulero, Legendre e Sphie Germain hanno fallito nel tentativo di formulare una dimostrazione. Solo nel 1993, dopo un lavoro durato 7 anni, il matematico britannico Andrew Wiles dimostra definitivamente il teorema. In onore di questa dimostrazione i matematici si riferiscono a questo teorema come il teorema di Fermat-Wiles.

- **Terne Pitagoriche con Potenza n-sima**

Per il teorema di Fermat-Wiles e per le formule di Eulero, le soluzioni all'equazione diofantea $a^n + b^n = c^n$ si ottengono solo per $n = 2$. Infatti, per i cubi, e tutte le altre potenze, invece questo non succede mai.

Osserviamo aritmeticamente cosa succede alle terne pitagoriche quando applichiamo una potenza maggiore di 2.

Ad esempio prendiamo la terna pitagorica più piccola $(3,4,5)$:

- $n = 2$ $\quad 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ $\quad 5^2 = 25$ $\quad 25 - 25 = 0$
- $n = 3$ $\quad 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$ $\quad 5^3 = 125$ $\quad 125 - 91 = 34$
- $n = 4$ $\quad 3^4 + 4^4 = 81 + 256 = 337$ $\quad 5^4 = 625$ $\quad 625 - 337 = 288$
- $n = 5$ $\quad 3^5 + 4^5 = 243 + 1024 = 1267$ $\quad 5^5 = 3125$ $\quad 3125 - 1267 = 1858$

A partire dalla potenza 2, al crescere della potenza cresce anche la differenza $c^n - (a^n + b^n)$. Per la stessa natura delle funzioni esponenziali, questo andamento è tipico di tutte le terne pitagoriche.

Verifichiamo!

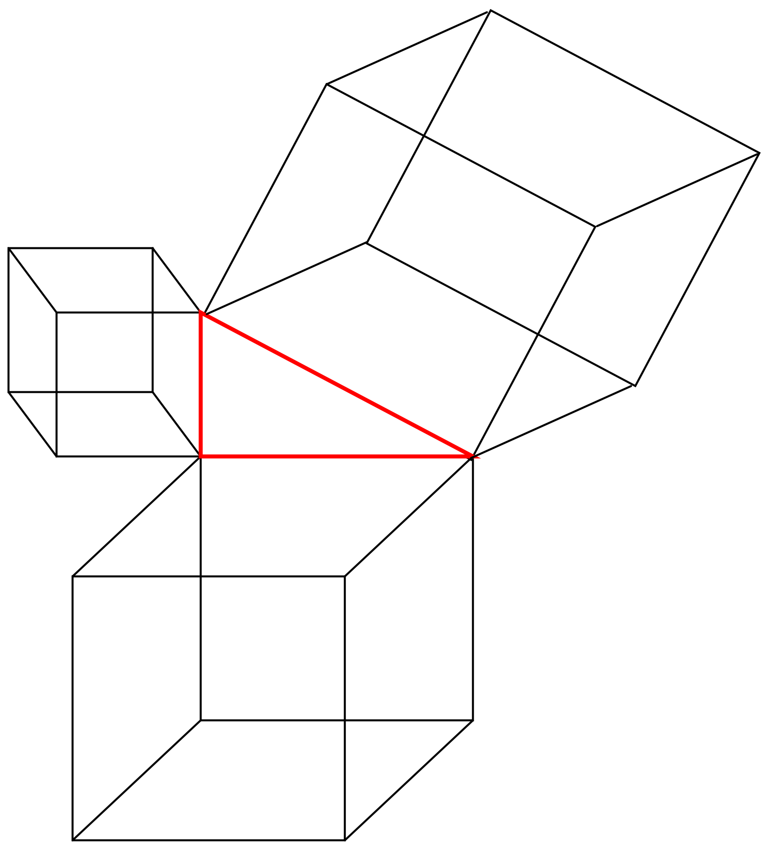
Prendiamo la nostra equazione, $a^n + b^n = c^n$, se (a,b,c) è una terna pitagorica risulta $n = 2$ per il quale la differenza $c^n - (a^n + b^n) = 0$.

La funzione $c^n - (a^n + b^n)$ è crescente per $n > 2$, infatti, se dividiamo tutto per c^n otteniamo $1 - \left[\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n\right]$ che è a sua volta una funzione crescente per $n > 2$.

Essendo (a,b,c) una terna pitagorica sappiamo che $c > a$ e $c > b$ quindi $0 < \frac{a}{c} < 1$ e $0 < \frac{b}{c} < 1$, pertanto $\left(\frac{a}{c}\right)^n$ e $\left(\frac{b}{c}\right)^n$ sono funzioni decrescenti e conferma la crescenza di $1 - \left[\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n\right]$ che a sua volta conferma la crescenza di $c^n - (a^n + b^n)$.

- **Aspetto geometrico**

Come abbiamo visto prima, nel paragrafo "*Terne Pitagoriche*", geometricamente una terna pitagorica corrisponde alle misure intere dei 3 lati di un triangolo rettangolo, in cui l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti. Per quanto abbiamo osservato invece nel paragrafo "*Terne Pitagoriche con potenza n-sima*" possiamo affermare che il volume del cubo costruito sull'ipotenusa e minore della somma dei volumi dei cubi costruiti su due cateti.



In questo caso $n = 3$ ed n esprime il numero delle dimensioni della figura geometrica costruita sui lati del triangolo. Di conseguenza per $n > 3$ le figure che andremo a costruire sui lati del triangolo rettangolo sono degli ipercubi.

Più in generale, essendo l'ipercubo una forma geometrica regolare immersa in uno spazio di quattro o più dimensioni ($n > 3$), possiamo dire che in ogni triangolo rettangolo, qualunque ipercubo costruito sull'ipotenusa ha l'ipervolume minore della somma degli ipervolumi degli ipercubi costruiti sui due cateti.

- **Conclusioni**

Gli aspetti descritti nel presente articolo non mostrano elementi utilizzabili per formulare un'alternativa dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat ma illustra una simpatica proprietà della funzioni esponenziali legata all'equazione diofantea di Fermat applicata alle terne pitagoriche che si riflette geometricamente sui triangoli rettangoli e sul teorema di Pitagora.

- **Riferimenti**

1) **Terna Pitagorica**
   Wikipedia
   http://it.wikipedia.org/wiki/Terna_pitagorica

2) **Ultimo teorema di Fermat**
   Wikipedia
   http://it.wikipedia.org/wiki/Ultimo_teorema_di_Fermat