Formula per la determinazione della Successione generalizzata di Fibonacci.

A cura di Eugenio Amitrano

Contenuto dell'articolo:

1. Introduzione

La formula proposta vuole essere una generalizzazione della formula di Binet che a differenza di quest'ultima determina gli elementi, non solo della successione di Fibonacci, ma di tutte le sue successioni derivate variando i due termini iniziali oltre che definendo il peso d'incidenza dei due addendi che precedono ogni termine della successione (da qui la definizione di Successione generalizzata di Fibonacci).
In precedenza alla formula anzidetta, sono illustrati la Successione di Fibonacci e la Formula di Binet.

2. Successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci, che indichiamo con $(F_n)_{\forall n \in N_0}$, è definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \forall\, n \geq 2 \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

È facile verificare che lo sviluppo di tale successione corrisponde alla seguente:

$$(F_n) = \{0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad ...\}$$

Da sempre, la Successione di Fibonacci ha attirato l'attenzione delle persone, in quanto, oltre ad essere dotata di particolari proprietà matematiche, si trovano molto spesso corrispondenze in natura, tanto da essere soprannominata "*Successione Divina*".

3. Formula di Binet per la Successione di Fibonacci

Per determinare un qualsiasi termine della Successione di Fibonacci, la Formula di Binet si serve del famosissimo Rapporto Aureo.

Infatti, calcolando il limite del rapporto tra un termine della Successione con il suo precedente $\lim_n \frac{F_n}{F_{n-1}}$, otteniamo due soluzioni:

1. Il Numero Aureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...$
2. Il suo reciproco $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}6180339...$

Ogni elemento della successione di Fibonacci è determinata dalla seguente formula:

$$F_n = \frac{\Phi^n - \phi^n}{\sqrt{5}} \quad \forall n \in N_0$$

È straordinario verificare come una formula costituita da elementi irrazionali possa fornire numeri interi come risultato.

4. Successione generalizzata di Fibonacci

La successione di Fibonacci, che indichiamo con $(S_n)_{\forall n \in N_0}$, è definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} S_n = \alpha \cdot S_{n-2} + \beta \cdot S_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad \forall \alpha, \beta \in R \\ \forall S_0 \in R \\ \forall S_1 \in R \end{cases}$$

La generalizzazione consiste globalmente in due sotto-generalizzazioni:

a. I due termini iniziali S_0 e S_1 possono assumere qualsiasi valore reale.
b. I due termini consecutivi, utilizzati per la determinazione del successivo, sono moltiplicate per i rispettivi pesi α e β.

<u>Nota</u>: Applicando le seguenti posizioni $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, la Successione generalizzata corrisponde alla Successione di Fibonacci.

5. Formula per la Successione generalizzata di Fibonacci

Come per la formula di Binet, calcoliamo il limite del rapporto tra un termine della successione e il suo precedente $\chi = \lim_{n} \frac{S_n}{S_{n-1}}$ da cui è facile verificare la validità della relazione $\forall t \in N_0 \; \chi = \lim_{n} \frac{S_{n-t}}{S_{n-t-1}}$.

$$\chi = \lim_{n} \frac{S_n}{S_{n-1}} = \lim_{n} \frac{\alpha \cdot S_{n-2} - \beta \cdot S_{n-1}}{S_{n-1}} = \alpha \cdot \lim_{n} \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}} + \beta = \frac{\alpha}{\chi} + \beta$$

quindi risulta $\chi = \frac{\alpha}{\chi} + \beta$ portata a forma l'equazione di 2° grado $\chi^2 - \beta\chi - \alpha = 0$.

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$\chi = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2} = \begin{cases} + & \lambda \\ - & \mu \end{cases}$$

Ogni elemento della Successione generalizzata di Fibonacci è determinata dalla seguente formula:

$$\boxed{S_n = \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^n - \mu^n\right)}{(\lambda - \mu)} \quad \forall\, n \in N_0}$$

6. Dimostrazione della Formula

Dimostriamo la formula utilizzando il Principio di Induzione Matematica.

- Verifica delle basi

Per $n = 0$; $\dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{-1} - \mu^{-1}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^0 - \mu^0\right)}{(\lambda - \mu)} = \dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\mu}\right)}{(\lambda - \mu)} = \dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\dfrac{\lambda - \mu}{\alpha}\right)}{(\lambda - \mu)} = S_0$; VERA.

Per $n = 1$; $\dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^0 - \mu^0\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^1 - \mu^1\right)}{(\lambda - \mu)} = \dfrac{S_1 \cdot (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)} = S_1$; VERA.

- Ipotesi induttiva

$S_n = \dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^n - \mu^n\right)}{(\lambda - \mu)}$; VERA

$S_{n-1} = \dfrac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right)}{(\lambda - \mu)}$; VERA

- Tesi

$$S_{n+1} = \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^n - \mu^n\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}\right)}{(\lambda - \mu)}$$

- Dimostrazione

Per definizione $S_{n+1} = \alpha \cdot S_{n-1} + \beta \cdot S_n$, e sostituendo l'ipotesi induttiva otteniamo:

$$S_{n+1} = \alpha \cdot \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right)}{(\lambda - \mu)} + \beta \cdot \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^{n} - \mu^{n}\right)}{(\lambda - \mu)}$$

Si procede, svolgendo alcuni passaggi algebrici:

$$S_{n+1} = \frac{\alpha^2 \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + \alpha \cdot S_1 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + \alpha \cdot \beta \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + \beta \cdot S_1 \cdot \left(\lambda^{n} - \mu^{n}\right)}{(\lambda - \mu)}$$

$$S_{n+1} = \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left[\alpha \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right)\right] + S_1 \cdot \left[\alpha \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n} - \mu^{n}\right)\right]}{(\lambda - \mu)}$$

Semplifichiamo l'espressione $\alpha \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right)$

Sapendo che $\lambda \cdot \mu = \alpha$ e che $\lambda + \mu = \beta$ per definizione, risulta

$$\alpha \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) =$$

$$= \lambda \cdot \mu \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + (\lambda + \mu) \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) =$$

$$= \lambda^{n-1} \cdot \mu - \lambda \cdot \mu^{n-1} + \lambda^{n} + \lambda \cdot \mu^{n-1} - \lambda^{n-1} \cdot \mu - \mu^{n} =$$

$$= \lambda^{n} - \mu^{n}$$

Quindi $\alpha \cdot \left(\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) = \lambda^{n} - \mu^{n}$.

Per lo stesso procedimento, possiamo semplificare anche la seguente espressione:

$\alpha \cdot \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right) + \beta \cdot \left(\lambda^{n} - \mu^{n}\right) = \lambda^{n+1} - \mu^{n+1}$.

Ora possiamo sostituire le due espressioni, ottenendo proprio la Tesi.

$$S_{n+1} = \frac{\alpha \cdot S_0 \cdot \left(\lambda^{n} - \mu^{n}\right) + S_1 \cdot \left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}\right)}{(\lambda - \mu)}$$

Come Volevasi Dimostrare.

7. Conclusioni

Questa formula è applicabile in numerosi contesti.
Per citarne alcuni:

- In Matematica, per il calcolo delle Successioni Fibonacci-Simili (Es. Lucas);
- In Biologia, per la verifica delle corrispondenze naturali;
- In Economia, per le previsioni della borsa azionistica di Milano;
- Nella crittografia a chiave pubblica;
- In Informatica come Algoritmo di calcolo.