Connessioni tra partizioni di numeri p(n) e funzione di Landau come ipotesi RH equivalente

Michele Nardelli, Francesco Di Noto

Abstract

In this paper we show a connection between partition of numbers and Riemann equivalent hypothesis by means of Landau' function.
Both functions are connected with some natural phenomena)

Riassunto

In questo lavoro mostriamo la relazione tra la funzione partizioni di numeri p(n) e l'ipotesi di Riemann, tramite la funzione di Landau come ipotesi RH equivalente.
Poiché sia la funzione zeta di Riemann sia la funzione p(n) sono connesse ad alcuni fenomeni naturali (quantistici, cosmologici (Rif. finali), una migliore conoscenza della connessione tra le due suddette, potrebbe portare ad una migliore comprensione dei suddetti fenomeni naturali qualora fossero studiati tenendo conto della suddetta connessione (finora sono stati studiati quasi sempre con le due funzioni separatamente, ma tenendo conto di entrambe si potrebbero raggiungere nuovi e possibilmente anche interessanti risultati).
Poiché abbiamo trovato delle connessioni tra alcuni fenomeni naturali con la funzione zeta di Riemann $\varsigma(s)$ e con la funzione partizioni di numeri p(n), (vedi Riferimenti finali), vogliamo qui approfondire meglio la connessione matematica tra le due

funzioni, in modo da chiarire in seguito le relazioni tra tali connessioni
con i fenomeni naturali (quantistici, cosmologici) finora studiati separatamente con una sola funzione.
Della funzione zeta di Riemann e della relativa ipotesi si sa già molto. Della funzione RH equivalente funzione di Landau, che la connette alle partizioni, ne parleremo invece meglio in questo lavoro, riportando da Wikipedia la "Funzione di Landau", a sua volta connessa ai gruppi di simmetria S_n (anche i cinque gruppi di Lie, per esempio E8, sono gruppi di simmetria):

"Funzione di Landau

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La funzione di Landau $g(n)$ è definita per ogni numero naturale n che è il più grande ordine di un elemento del gruppo simmetrico S_n. Equivalentemente, $g(n)$ è il più grande minimo comune multiplo di una qualunque partizione di n.

Ad esempio, 5 = 2 + 3 e mcm(2,3) = 6. Nessun altra partizione di 5 porta ad un minimo comune multiplo più grande, dunque $g(5) = 6$. Un elemento di ordine 6 nel gruppo S_5 può essere scritto come (1 2) (3 4 5).

I valori che assume la funzione di Landau in corrispondenza dei primi numeri naturali è

1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 (Sequenza A000793 dell'OEIS)

La sequenza prende il suo nome da Edmund Landau, il quale dimostrò nel 1902[1] che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(g(n))}{\sqrt{n\ln(n)}} = 1$$

(dove ln indica il logaritmo naturale).

L'affermazione

$$\ln g(n) < \sqrt{Li^{-1}(n)}$$

per ogni n, dove Li^{-1} indica l'inverso della funzione logaritmo integrale, è equivalente all'ipotesi di Riemann. "

La funzione di Landau , analogamente ad altre funzioni, per esempio la funzione σ(n) ha un grafico di tipo comet, e come tale è connessa anche alla RH, in questo caso ad una RH equivalente.

E così come la funzione σ(n) mostra la verità della RH1, anche la funzione di Landau , anch'essa con grafico comet, (vedi Nota 3) mostra indirettamente la verità della RH, ora però tramite le partizioni p(n) anzichè con la somma divisori σ(n) (Stiamo lavorando ad una congettura sulla verità delle congetture con grafici comet e contro-esempi nulli; per esempio RH1 =RH, Goldbach, Legendre…)

Stime logaritmiche

Qui vogliamo anche mostrare qualche formula per una attendibile stima logaritmica dei numeri connessi alla funzione di Landau, fino a valori successivi di N = 10^n, tramite la seguente tabella, basata sulla sequenza : **1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 …;**
(per le ripetizioni , sono contate una sola volta)

N	N = 10^n	Numeri di a(n) fino a 10^m	ln (10^n)	Rapporto a(n) / lnN
1	10	**6**	2,30	2,60
2	100	**11**	4,60	2,39
3	1 000	**18**	6,90	2,60
4	10 000	**23**	9,21	2,49
5	100 000	**29**	11,51	2,51
…	…	…	…	…

La formula logaritmica per una stima attendibile di a(n) senza ripetizioni, è quindi a(n) ≈ 2,51* ln (10^m), essendo 2,398 la media aritmetica 12.59 /5 = 2,518 tra i primi cinque rapporti

a(n)/ln(10^n). Arrotondando, possiamo anche calcolare la media con 12,5/5= 2,5, semplificando 2,398 in **2,50**
(mediamente il rapporto ln(N)/Log(N) è di circa 2,3

In tal modo :

a(10)	≈	ln (10^1)*2,50	=	2,30*2,50 =	5,75	≈	**6**
a(10^2)	≈	ln (10^2)*2,50	=	4,60*2,50 =	**11**,5	≈	**11**
a(10^3)	≈	ln (10^3)*2,50	=	6,90*2,50 =	17,25	≈	**18**
a(10^4)	≈	ln (10^4)*2,50	=	9,21*2,50 =	**23**,02	≈	**23**
a(10^5)	≈	ln (10^5)*2,50	=	11,51*2,50 =	28,77	≈	**29**
a(10^6)	≈	ln (10^6)*2,50	=	13,81*2,50 =	**34**,52	≈	**?**
…		…		…	…		…

Per i prossimi valori, possiamo cosi prevedere che, per esempio, per N = 10^9, a(10^9) sarà di circa:

ln(10^9)*2,40 ≈ 20,72*2,50 = 51,08 **≈ 51**

Un'altra stima attendibile è a(10^n) ≈ 6*n, usando il logaritmo a base decimale; **a(n) ≈ 6*Log(10^n)**, che fornisce ora come valori stimati :

6*1 =	**6**	=	**6**			
6*2 =	12	≈	**11**			
6*3 =	**18**	=	**18**			
6*4 =	24	≈	**23**			
6*5 =	30	≈	**29**			
6*6 =	**36**	≈	**?**	≈	**34**	**valori stimati**
…	…		…			
6*9 =	**54**	≈	**?**	≈	**51**	**valori stimati**
…	…		…			

anche questi molto prossimi ai valori reali (in blu)

La funzione di Landau cresce mediamente quindi di circa ln(n)*2,50. Ed il valore 2,50 è prossimo alla radice quadrata di 6 , poiché

$\sqrt{6} = 2{,}4494\ldots \approx$ **2,50**

Un'altra cosa interessante è che i rapporti successivi tra i valori di a(n) tendono a 1,2720 = $\sqrt{}$ 1,618: infatti

11/6 = 1,8333
18/11 = 1,6363
23/18 = 1,2777
29/23 = 1,2608
36/29 = 1,2413 , con 36 stimato
… … ….

E quindi una possibile sospetta relazione con Φ =1,618…
Ma tendono anche a 1,2574 = $\sqrt{\sqrt{2{,}50}}$, radice quarta di 2,50

Ulteriori confronti tra i valori reali e i valori stimati confermeranno o meno tali stime logaritmiche approssimative

TABELLA
per i numeri a(n) della funzione di Landau

Sequenza a(n) : **1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 …;**
(di questi numeri, 1, 3, 6, 15, 105, e poi anche 210 e 1540, sono anche numeri triangolari T essi stessi; e 210*2 = **420** =2T è anche un numero della serie di Landau)

a(n) ≈ 2T $\pm$ c'', con c'' da 0 a 6)

2T-3	2T-2	2T-1	**2T**	2T+1	2T+2	2T+3	a(n)	Diff. 2T – a(n) = c''
-1	0	**1**	**2**	**3**	**4**	5	2	0
1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	4	0
9	10	11	**12**	13	14	**15**	12	0
17	18	19	**20**	21	22	23	20	0
27	28	29	**30**	31	32	33	30	0

39	40	41	**42**	43	44	45		
53	54	55	**56**	57	58	59≈**60**	60	-4
69	70	71	**72**	73	74	75		
84≈87	88	89	**90**	91	92	93		+6
105≈107	108	109	**110**	111	112	113		+5
129	130	131	**132**	133	134	135		
…	…	…	…	…	…	…		

Nota: **84**= **90** - 6 , **105** = **110** - 5, **60** = **56** +4, quindi anch'essi prossimi a 2T, come **3**, **6** e **15** mentre **2**, **4**, **12**, **20** e **30** sono perfettamente coincidenti con numeri di forma 2T, e questo non può essere una casualità. Succede la stessa cosa con altri numeri emersi da calcoli relativi ad alcuni fenomeni considerati in lavori precedenti, vedi Riferimenti finali, sul sito http://nardelli.xoom.it/virgiliowizard/ del Dott. Nardelli : in particolare l'articolo "**On some applications of the Eisenstein series in String Theory. Mathematical connections with some sectors of Number Theory and with Φ and π",** vedi Tabelle finali.

Frattalità delle partizioni.

Ken Ono ha scoperto che anche le partizioni hanno caratteristica di frattalità, come già noto per la serie dei numeri di Fibonacci. Ma anche i numeri di Lie, e quindi i gruppi di simmetria, hanno tale proprietà (che conferisce regolarità e stabilità ai fenomeni naturali in cui esse compaiono nelle descrizioni matematiche); forse perché tutte e tre si originano dalla formula delle geometrie proiettive L(n) = n^2 + n + 1 = 2T +1 con n numero primo o una sua potenza, e T numeri triangolari; 2T è anche la somma dei primi n numeri pari. I valori di L(n) si trovano esattamente a metà strada tra due quadrati, essendo la differenza tra due quadrati uguale a 2n+1 = n+n+1: togliendo una n , rimane n+1, insieme al

quadrato precedente: Per es. 9^2 + 9 + 9 +1 = 81 +9 +9 = 100=10^2: se togliamo n = 9, rimangono 81+ 9 = 90, e 90 +1 = 91 con 91 numero di Lie, prossimo a 89 numero di Fibonacci, o meglio somma di due numeri di Fibonacci 2 e 89.
La formula dei numeri di Fibonacci è infatti
F(n) = n^2 + n ± c, con c numero molto piccolo (spesso intorno alla radice quadrata di n), mentre la formula per le partizioni è
p(n) = n^2 + n + c' con c' un po' più grande di c. Per un valore di p(n) vicino a 89, e a 91, abbiamo:
89 = 9^2+9 -1 con c = -1
91= 9^2+9 +1
Per il numero di partizione più vicino, 101, abbiamo invece
101 = 9^2+9 +11 con c' = 11 = 101 – 90, con 90 = 9^2+ n

n. partizioni

`1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297,`

sequenza a(n)

1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 …;

Concludiamo con uno schema generale delle connessioni, dai numeri primi dell'equazione delle geometrie proiettive n^2+n+1, ai numeri di Fibonacci, di Lie e partizioni di numeri, ecc. ecc . fino alle teorie di stringa e ai fenomeni naturali e cosmologici, di tipo frattale:

Geometria proiettiva
n^2+n+1
(con n primo o potenza di rimo)
↓ ↓

F(n) ≈ n^2 + n + c
Fibonacci
(frattali)

↓

p(n) ≈ n^2+n ± c'
Partizioni di numeri
(frattali)

L(n) = n^2+ n+1
Numeri di Lie

↓

Gruppi di simmetria
Gruppi eccez. di Lie, es.E8)
↓ ↓ ↓

Funzione zeta
(Ipotesi di Riemann)
↕ ↕

Zeta di Fibonacci
(tramite Φ)

Funzione di Landau
tramite p(n)

↓

Teoria di stringa → TOE (es. E8)
↓

<u>Fenomeni naturali (frattali)</u>
↓ ↓ ↓

Quantistici
(livelli energetici
degli atomi)
spirali,ecc.)
(funzione zeta, p(n)

Chimici
↓
(niobato di cobalto)
(Φ, E8)
(stato critico quantistico
corrispondente ai frattali)

Cosmologici
↓
(galassie
(Φ, p(n))

Conclusioni

Concludendo, possiamo dire che con questo lavoro abbiamo connesso alcuni settori della teoria dei numeri (numeri di Fibonacci, di Lie, e partizioni) con: funzione zeta di Riemann, ipotesi di Riemann (tramite la funzione di Landau come ipotesi RH equivalente), teoria di stringa e fenomeni naturali di tipo frattale; inoltre abbiamo trovato una buona formula logaritmica per una stima abbastanza attendibile della quantità di numeri a(n) relativi alla funzione di Landau ($a(n) \approx \ln(n) * 2{,}40$, numeri uguali al più alto minimo comune multiplo di una qualunque partizione del numero n.

Riferimenti

Tutti gli articoli di matematica e soprattutto di fisica pubblicati

sui seguenti siti:

www.gruppoeratostene.com, sezione “Articoli”,

sottosezione”Articoli sulla Fisica Matematica” e “Articoli su

Fibonacci”

http://xoomer.alice.it/stringtheory

http://nardelli.xoom.it/virgiliowizard/

http://mathbuildingblock.blogspot.com/

http://rudimathematici.com/bookshelf.htm Il Block Notes

Matematico

NOTE FINALI

Nota 1

Notizia della scoperta di una nuova formula di Ken Ono

Riportiamo per intero la notizia data dal sito di Maddmaths:
maddmaths.**simai**.eu/...**di**.../dietro-le-**partizioni-dei-numeri-**si-nascondo-i- frattali

"Dietro le partizioni dei numeri si nascondo….i frattali!

Per secoli alcuni dei matematici più famosi si sono interessati allo studio delle partizioni dei numeri, senza riuscire a definire una teoria completa e lasciando irrisolte molte domande.

In un recente studio, il matematico Ken Ono dell'Università di Emory, ha ideato una nuova teoria che è in grado di rispondere ad antiche e note domande sulle partizioni di un numero, (ovvero sequenze di numeri positivi che sommati danno quel numero).

Ken Ono e il suo gruppo di ricerca, hanno infatti scoperto che le partizioni dei numeri primi si comportano in realtà come frattali. Le proprietà di divisibilità delle partizioni individuate, hanno permesso di vedere come la loro sovrastruttura si ripeta infinitamente.

Inoltre hanno ideato la prima formula finita per calcolare le partizioni di qualsiasi numero.

“Il nostro lavoro si basa su idee completamente nuove per questi problemi” ha detto Ono. “Noi abbiamo provato che le partizioni dei numeri primi sono “frattali”. Il nostro procedimento di ingrandimento risolve molte delle congetture ancora aperte e può cambiare il modo in cui i matematici studiano le partizioni.”

Questo lavoro è stato finanziato dall’American Institute of Mathematics (AIM) e dal National Science Foundation. Lo scorso anno l’AIM ha raggruppato i maggiori esperti mondiali sulle partizioni, incluso Ono, per risolvere alcuni dei più importanti problemi aperti in questo campo. Ono, professore sia dell’Università di Emory che dell’Università del Wisconsin a Madison, ha guidato il gruppo formato da: Jan Bruinier della Technical University di Darmstadt in Germania, Amanda Folsom dell’Università di Yale e Zach Kent post doc dell’Università di Ermony.

“Ken Ono ha ottenuto scoperte assolutamente straordinarie nella teoria delle partizioni”, ha affermato George Andrews, professore alla Pennsylvania State e presidente della American Mathematical Society. “Ha dimostrato le proprietà di divisibilità della funzione partizione e ciò è stupefacente. Ha fornito un sovrastruttura a cui nessuno prima di lui aveva pensato. E’ un fenomeno.”

La partizione di un numero può sembrare quasi un gioco per la sua semplicità. Ad esempio 4=3+1=2+2=1+1+1+1. Esistono quindi 5 partizioni del numero 4. Fin qui tutto è semplice ma, le partizioni dei numeri aumentano con un tasso incredibile. Ad esempio il numero totale delle partizioni del numero 10 è 42. Mentre per il numero 100, le partizioni superano 190.000.000.

“Le partizioni dei numeri sono folli sequenze di interi che vanno verso l’infinito” ha affermato Ono “tale successione suscita meraviglia ed ha affascinato i matematici per molto tempo”.

Nonostante la semplicità della definizione, fino alle scoperte del gruppo di Ono, nessuno era stato in grado di svelare il segreto della complessa struttura che si nascondeva dietro questa rapida crescita.

Nel diciottesimo secolo il matematico Eulero ha sviluppato una prima tecnica ricorsiva per calcolare il valore delle partizioni dei numeri. Il metodo però era lento e comunque non praticabile per numeri grandi.

Nei successivi 150 anni tale metodo è stato implementato con successo per calcolare solo partizioni dei primi 200 numeri. “Nell’universo matematico ciò significa di non essere in grado di vedere oltre Marte” ha detto Ono.

Agli inizi del ventesimo secolo Srinivasa Ramanujan e G. H. Hardy hanno inventato il metodo circolare che è in grado di ottenere una prima approssimazione delle partizioni per i numeri oltre 200. Ma tale metodo essenzialmente non aspirava a cercare una risposta esatta, “accontentandosi” di un’approssimazione.

Anche Ramanujan aveva osservato strane strutture nella partizione dei numeri. Nel 1919 aveva notato che il numero di partizioni del numero 5n+4 (rispettivamente 7n+5, 11n+6) era un multiplo di 5 (rispettivamente 7, 11).

Nel 1937 Hans Rademacher trovò una formula esatta per calcolare il valore delle partizioni. Anche se questo metodo era un grande miglioramento rispetto alla formula esatta di Eulero, richiedeva la somma di una serie di numeri che avevano infinite cifre decimali.

Nei decenni successivi, diversi matematici hanno continuato a studiare tale problema, aggiungendo dei tasselli mancanti a questo puzzle. Ma, nonostante i progressi fatti, non sono stati in grado di trovare una formula finita per la partizione dei numeri.

Il "dream team" di Ono ha studiato il problema per mesi. "Qualsiasi cosa provavamo non funzionava" ha detto il leader del gruppo. Il punto di svolta è avvenuto inaspettatamente lo scorso settembre, quando Ono e Zach Kent stavano facendo un' escursione alle cascate Tallulah in Georgia. Mentre stavano camminando attraverso i boschi, hanno notato la struttura dei gruppi di alberi, ed hanno iniziato a pensare a come potesse essere camminare attraverso le partizioni dei numeri. "Eravamo in cima a delle enormi rocce dove potevamo vedere tutta la valle ed ascoltare il rumore delle cascate, quando abbiamo realizzato che le partizioni dei numeri sono frattali" ha detto Ono "ed entrambi abbiamo iniziato a ridere".

Il termine frattale fu inventato nel 1980 da Benoit Mandelbrot, per descrivere ciò che sembra irregolare nella geometria delle forme naturali. Un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento.

Con la loro semplice camminata nei boschi Ono e Kent hanno ideato una teoria che rivela una nuova classe di frattali "E' come se non avessimo bisogno di vedere tutte le stelle nell'universo perché la struttura continua a ripetersi per sempre, e quindi può essere vista in una camminata di 3 miglia alle cascate Tallulah" ha detto Ono.

Con questa teoria dei frattali è possibile provare le congruenze di Ramanujan. Il gruppo ha dimostrato che le proprietà di divisibilità delle partizioni dei numeri sono frattali per ogni numero primo. "Le successioni sono tutte eventualmente periodiche e si ripetono più e più volte ad intervalli precisi", ha affermato Ono, aggiungendo "E' come ingrandire in un insieme di Mandelbrot" riferendosi al più famoso frattale.

Ma questa straordinaria visione dentro la sovrastruttura della partizione dei numeri non era sufficiente per il gruppo di ricercatori, determinato ad andare oltre la teoria e trovare una formula che potesse essere implementata.

L'altro episodio fondamentale per la loro ricerca, è avvenuto in un altro noto luogo della Georgia, la "spaghetti junction". Ono e Jan Bruinier erano bloccati nel traffico nei pressi del noto scambio per Atlanta. Mentre stavano chiacchierando in macchina, cercavamo di trovare un modo per eliminare l'infinita complessità del metodo di Rademache. Il loro obiettivo era quello di provare una formula che richiedesse solo un numero finito di numeri.

"Abbiamo trovato una funzione, P, che è una sorta di oracolo magico" ha affermato Ono. "Posso prendere qualsiasi numero, inserirlo dentro P ed istantaneamente calcolare le partizioni di quel numero. P non da come risultato un numero terribile con infinite cifre decimali. E' quella formula algebrica finita che stavamo tutti cercando."

Il lavoro di Ono e dei suoi colleghi è descritto in due lavori che saranno presto disponibili sul sito del AIM. "

NOTA 2

Precedente formula di Ramanujan

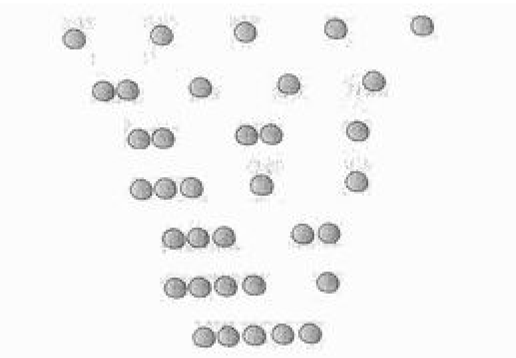
Dal nik "roberto20129" di Libero (network)

"**Srinivasa Ramanujan**

Un'equazione non significa nulla per me se non esprime un pensiero di Dio"

Insieme a Hardy, comunque, Ramanujan continuò la sua esplorazione di pròprietà dei numeri correlate. Le idee che lui e Hardy elaborarono avrebbero contribuito al primo passo avanti sulla strada di una dimostrazione della congettura di Goldbach, che cioè ogni numero pari è la somma di due numeri primi. Quel progresso giunse per vìa indiretta, ma il suo punto di partenza fu l'ingenua fiducia di Ramanujan nell'esistenza di formule esatte per esprimere importanti sequenze numeriche come quella dei numeri primi. Nella stessa lettera in cui egli sosteneva dì aver trovato una formula per i numeri primi, affermava dì aver compreso come generare un'altra sequenza rimasta fino ad allora indomata: quella delle partizioni dì un numero intero.

Quanti modi diversi ci sono di dividere cinque pietre in pile distinte? Il numero delle pile varia da un massimo di cinque pile composte da una sola pietra a una sola pila composta da cinque pietre, con un certo numero di possibilità intermedie: I sette modi possìbili di ripartire cinque pietre.



Tali possibilità distinte sono chiamate le partizioni del numero 5. Come mostra l'illustrazione, esistono sette possibili partizioni di 5.

Ed ecco qual è il numero di partizioni per i numeri interi che vanno da 1 a 15:

Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Partizioni	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Questa è una delle sequenze numeriche che abbiamo incontrato nel capitolo 2. Sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere : il modo in cui cresce il numero delle partizioni.

La distribuzione di questi numeri non appare casuale quanto quella dei numeri primi, ma la generazione dì Hardy aveva quasi rinunciato a trovare una formula esatta che producesse la loro sequenza. I matematici pensavano che, al massimo, vi potesse essere una formula in grado di produrre una stima che non si discostasse molto dall'effettivo numero di partizioni di N, in modo del tutto simile a quello in cui la formula di Gauss per Ì numeri primi forniva una buona approssimazione del numero di numeri primi non maggiori di N. Ma a Ramanujan non era mai stato insegnato a temere quel genere di sequenze. Era decìso a trovare una formula che gli dicesse che esistevano esattamente cinque modi dì dividere quattro pietre in pile distinte, o che ce n'erano 3.972.999.029.388 di divìdere 200 pietre in pile distinte.

Laddove aveva fallito con i numeri primi, Ramanujan ottenne un successo spettacolare con le partizioni. Fu la combinazione della capacità di Hardy di venire a capo di dimostrazioni complesse e della cieca fiducia di Ramanujan nell'esistenza di una formula esatta a condurli alla scoperta. Littlewood non capì mai «perché Ramanujan era così sicuro che ne esistesse una». E quando si osserva la formula — in cui compaiono la radice quadrata di 2, π , differenziali, funzioni trigonometriche, numeri immaginari — non si può fare a meno di domandarsi come sia stata concepita:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \le k \le N} \sqrt{k} \left(\sum_{h \bmod k} \omega_{h,k}\, e^{-2\pi i \frac{hn}{k}} \right) \frac{d}{dn} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right) + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

In seguito Littlewood osservò: «Dobbiamo il teorema a una collaborazione eccezionalmente felice fra due uomini dotati di talenti assai dissimili, alla quale ciascuno diede il contributo migliore, più caratteristico e fortunato che possedeva». Nella vicenda del calcolo delle partizioni c'è un dettaglio curioso. La complicata formula di Hardy e Ramanujan non fornisce il numero esatto di partizioni; produce invece una risposta che è corretta se la si approssima al numero intero più vicino. Così, per esempio, quando nella formula si inserisce il numero 200, si ottiene un valore non intero approssimato a 3.972.999.029.388. Perciò, benché la formula permetta di ottenere la risposta cercata, il fatto che non colga l'essenza dei numeri di partizioni di Noggetti lascia insoddisfatti. (In seguito sarebbe stata scoperta una variante della formula che da la risposta rigorosamente esatta.)

Anche se Ramanujan non riuscì a portare a buon fine lo stesso stratagemma nel caso dei numeri primi, il lavoro che compì insieme a Hardy sulla funzione dì partizione ebbe un impatto importante sulla congettura di Goldbach, uno dei grandi problemi irrisolti della teoria dei numeri primi. La maggior parte dei matematici aveva rinunciato persino a tentare dì risolvere questo problema. Né era mai stata proposta una sola idea da cui partire per provare a fare qualche progresso concreto nella risoluzione. Soltanto qualche anno prima, Landau aveva dichiarato che il problema era semplicemente inattaccabile.

Il lavoro compiuto da Hardy e Ramanujan sulla funzione di partizione inaugurò una tecnica che oggi è chiamata metodo del cerchio dì Hardy e Littlewood. Il riferimento al cerchio nel nome del metodo trae origine dai piccoli diagrammi che accompagnavano i calcoli di Hardy e Ramanujan e che rappresentavano cerchi nella mappa dei numeri immaginati attorno ai quali i due matematici cercavano di eseguire delle integrazioni. Il motivo per il quale al metodo viene associato il nome di Littlewood e non quello di Ramanujan è l'uso che Littlewood e Hardy ne fecero per dare il primo contributo sostanziale a una dimostrazione della congettura di Goldbach. Pur non essendo in grado di provare che ogni numero pari poteva essere espresso come somma di due numeri primi, nel 1923 Hardy e Littlewood riuscirono a dimostrare una cosa che per i matematici era quasi altrettanto importante, ovvero che tutti Ì numeri dìspari maggiori di un certo numero fissato (un numero enorme) potevano essere scritti come somma dì tre numeri primi. Ma c'era una condizione che erano obbligati a porre perché la loro dimostrazione risultasse valida: che l'ipotesi di Riemann fosse vera. Questo era dunque ancora un altro risultato subordinato al fatto che l'ipotesi di Riemann diventasse prima o poi ìl teorema di Riemann. ...“

Nota 3

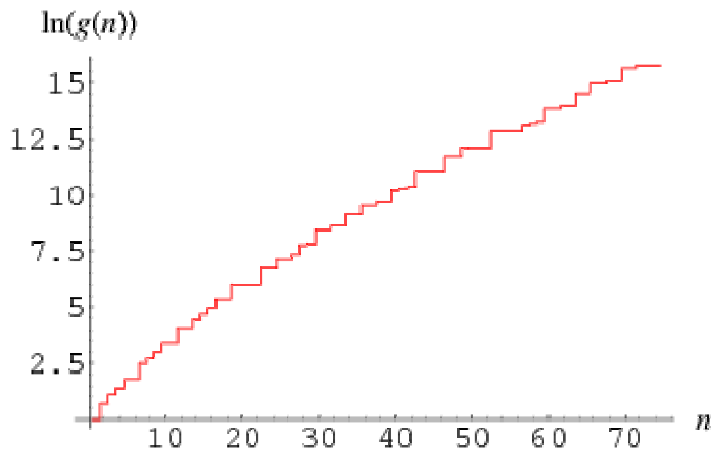
VOCE " ***Landau's Function***" da Wolfram MathWorld:

(con grafici tipo comet)

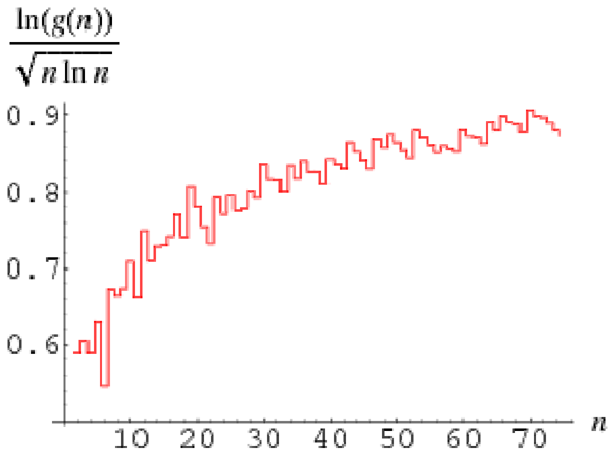
Algebra > Group Theory > Group Properties >

Landau's Function

DOWNLOAD *Mathematica* Notebook



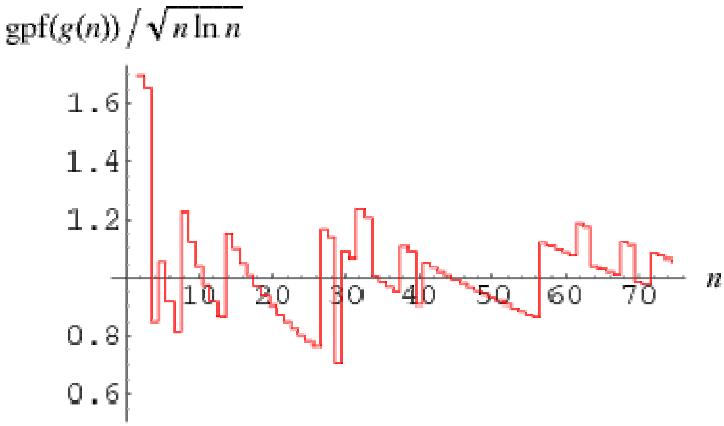
Landau's function $g(n)$ is the maximum order of an element in the symmetric group S_n. The value $g(n)$ is given by the largest least common multiple of all partitions of the numbers 1 to n. The first few values for $n = 1$, 2, ... are 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, ... (Sloane's A000793), and have been computed up to $n = 500000$ by Grantham (1995).



Landau showed that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln[g(n)]}{\sqrt{n \ln n}} = 1.$$

Local maxima of this function occur at 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 17, 19, 30, 36, 40, ... (Sloane's A103635).



Let $\mathrm{gpf}(a(n))$ be the greatest prime factor of $g(n)$. Then the first few terms for $n = 2$, 3, ... are 2, 3, 2, 3, 3, 3, 5, 5,

5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 11, ... (Sloane's A129759). Nicolas (1969) showed that

$\mathrm{gpf}(g(n)) \sim \sqrt{n \ln n}$. **Massias *et al.* (1988, 1989) showed that for all $n \geq 2$, $\mathrm{gpf}(g(n)) \leq 2.86 \sqrt{n \ln n}$,**

and Grantham (1995) showed that for all $n \geq 5$, the constant 2.86 may be replaced by 1.328. "

Il primo grafico è di tipo Comet, indizio di verità della congettura presa in considerazione, in questo caso l'ipotesi RH equivalente basata sulla funzione di Landau.