

# La funzione di Landau come ipotesi RH equivalente II

(La nostra proposta di dimostrazione empirica con tabelle e grafico comet; ulteriori connessioni con le partizioni di numeri)

Francesco Di Noto e Michele Nardelli

## Abstract

In this paper we will consider Landau Function as an equivalent RH, with its comet graph and some connections with number partition  $p(n)$ ,  $\Phi$  and  $\pi$

## Riassunto

In Rif. 1, prima parte di questo lavoro, abbiamo parlato della funzione di Landau come ipotesi RH equivalente e delle sue connessioni con le partizioni di numeri, importanti in fisica: In questa seconda parte approfondiamo la prima parte, dimostrando con tabelle numeriche e grafico di tipo comet, la verità della funzione di Landau come ipotesi RH equivalente (che chiameremo RH L), e quindi, indirettamente, la RH, basata invece sulla più difficile funzione zeta.

In più aggiungeremo nuove osservazioni sulle partizioni di numeri alle quali la funzione è connessa tramite il m.c.m. più grande per una partizione di ogni numero naturale  $n$ . In Rif. 2 e Rif. 3 si possono trovare dei lavori sulle altre ipotesi RH equivalenti. Infine, in omaggio al matematico Edmund Landau, indichiamo due riferimenti (Rif. 5 e Rif. 6) a nostri lavori precedenti sugli infiniti numeri di Landau, di forma  $n^2 + 1$ , e alla relativa congettura

oooooooooooo

Per iniziare riportiamo parzialmente la voce di Wikipedia sulla “Funzione di Landau”

# ‘Funzione di Landau

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La funzione di Landau  $g(n)$  è definita per ogni [numero naturale](#)  $n$  che è il più grande [ordine](#) di un elemento del [gruppo simmetrico](#)  $S_n$ . Equivalentemente,  $g(n)$  è il più grande [minimo comune multiplo](#) di una qualunque [partizione](#) di  $n$ .

Ad esempio,  $5 = 2 + 3$  e  $\text{mcm}(2,3) = 6$ . Nessun'altra partizione di 5 porta ad un minimo comune multiplo più grande, dunque  $g(5) = 6$ . Un elemento di ordine 6 nel gruppo  $S_5$  può essere scritto come  $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ .

I valori che assume la funzione di Landau in corrispondenza dei primi numeri naturali è

1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 (Sequenza [A000793](#) dell'[OEIS](#))

La sequenza prende il suo nome da [Edmund Landau](#), il quale dimostrò nel 1902<sup>[1]</sup> che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(g(n))}{\sqrt{n \ln(n)}} = 1$$

(dove  $\ln$  indica il [logaritmo naturale](#)).

L'affermazione

$$\ln g(n) < \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}$$

per ogni  $n$ , dove  $\text{Li}^{-1}$  indica l'inverso della funzione [logaritmo integrale](#), è equivalente all'[ipotesi di Riemann](#)....”

Cambiando il tipo di logaritmo abbiamo le seguenti e simili

disuguaglianze, che potrebbero confermare anche se indirettamente la

RH equivalente basata sulla funzione di Landau

$$\ln g(n) > \sqrt{\ln^{-1}(n)}, \quad (2)$$

$$\text{e } \log g(n) > \sqrt{\log^{-1}(n)} \quad (\text{da } n = 8) \quad (3)$$

equivalenti alla:

$$\ln g(n) < \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} \quad (1)$$

anche se qui è invece  $\ln g(n)$  ad essere minore di  $\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}$

**Tabella unificata fino ad  $n = 15$**

$n$	$g(n)$	$\text{Ln}(n)$	$\ln g(n)$	$\log(n)$	$\text{Log} g(n)$	$\sqrt{\ln^{-1}}$	$\sqrt{\log n^{-1}}$	Differenze
a	b	c	d	e	f	g	h	d-g ; e-h
1	1	0	0	0	0	-	-	-
2	2	0,69	0,69	0,30	0,30	1,20	1,82	-0,51; -1,52
3	3	1,09	1,09	0,47	0,47	0,95	1,45	0,14; - 0,98
4	4	1,38	1,38	0,60	0,60	0,85	1,29	0,53; - 0,69
5	6	1,60	1,79	0,69	0,77	0,74	1,20	1,05; - 0,43
6	6	1,79	1,79	0,77	0,77	0,74	1,13	1,05;- 0,36
7	12	1,94	2,48	0,84	0,71	0,71	1,09	1,77; -0,38
8	15	2,07	2,70	0,90	1,17	0,69	1,05	2,01; 0,12
9	20	2,19	2,99	0,95	1,30	0,67	1,02	2,32; 0,28
10	30	2,30	3,40	1	1,47	0,65	1	2,75; 0,47
11	30	2,39	3,40	1,04	1,47	0,64	0,97	2,76; 0,50
12	60	2,48	4,09	1,07	1,77	0,63	0,96	3,46; 0,81
13	60	2,56	4,09	1,11	1,77	0,62	0,94	3,47; 0,83
14	84	2,63	4,43	1,14	1,92	0,61	0,93	3,82; 0,99
15	105	2,70	4,65	1,17	2,02	0,60	0,92	4,05; 1,01
...	...	...	...	...	...	...	...	...
25	1260	3,21	7,13	1,39	3,10	0,55	0,84	6,58; 2,26
26	1540	3,25	7,33	1,41	3,18	0,55	0,84	6,78; 2,34
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Come si vede, entrambe le differenze crescono sempre più (la seconda differenza a partire da  $n = 8$ ), quindi anche questi valori finali potrebbero confermare l'ipotesi RH equivalente di Landau; le relative curve logaritmiche sono solo rispettivamente più basse di  $\sqrt{\text{Li}(n)^{-1}}$  e

di  $\ln g(n)$ , ma sempre crescenti e quindi anche loro sempre più lontane dal contro esempio

$$0 = \sqrt{Li^{-1}(n)} - \ln g(n) \quad (1)$$

della prima disuguaglianza, ed equivalente alle altre due (2) e (3);

e quindi, in questo caso, l'ipotesi RH equivalente

basata sulla Funzione di Landau è vera

**Riportiamo ora una tabella dei valori di  $Li(x)$  con  $x$  da da 3 a 20 inviataci dal Sig. Cristiano Armellini, appassionato di teoria dei numeri, che confronteremo con  $\ln(g(n))$  per lo studio e il grafico di tipo comet, forte indizio della verità dell'ipotesi RH equivalente basata sulla funzione di Landau:**

**$NIntegrate[1/Log[x], \{x, 2, 20\}]$**

**$x = 3 \quad L(i) = 1.11842$**

**$x = 4 \quad L(i) = 1.92242$**

**$x = 5 \quad L(i) = 2.58942$**

**$x = 6 \quad L(i) = 3.17706$**

**$x = 7 \quad L(i) = 3.71189$**

**$x = 8 \quad L(i) = 4.20855$**

**$x = 9 \quad L(i) = 4.67607$**

**$x = 10 \quad L(i) = 5.12044$**

**$x = 11 \quad L(i) = 5.54585$**

**$x = 12 \quad L(i) = 5.95538$**

**$x = 13 \quad L(i) = 6.35138$**

**$X = 14 \quad L(i) = 6.73566$**

**$x = 15 \quad L(i) = 7.10966$**

**$x = 16 \quad L(i) = 7.47455$**

**$x = 17 \quad L(i) = 7.83130$**

$$x = 18 \quad L(i) = 8.18071$$

$$x = 19 \quad L(i) = 8.52346$$

$$x = 20 \quad L(i) = 8.86014$$

### Tabella comparativa $\ln(g)n$ e $\sqrt{Li(n)}^{-1}$

$n = x$ (a)	$g(n)$ (b)	$\ln g(n) >$ (c)	$\sqrt{Li(n)}^{-1}$ (d)	Differenza (c) - (d) e rapporto (c)/(d)	
1	1	0	0	---	---
2	2	0,69...	---	---	---
3	3	1,09...	0,94557	0,15	1,15
4	4	1,38...	0,72123	0,66	1,91
5	6	1,79...	0,62143	1,17	2,88
6	6	1,79...	0,56103	1,23	3,19
7	12	2,48...	0,51904	1,97	4,86
8	15	2,70...	0,48745	2,22	5,62
9	20	2,99...	0,46244	2,24	6,79
10	30	3,40...	0,44192	2,96	8,09
11	30	3,40...	0,42463	2,98	8,09
12	60	4,09...	0,40977	3,69	10,22
13	60	4,09...	0,39679	3,70	10,48
14	84	4,43...	0,38530	4,05	11,65
15	105	4,65...	0,37503	4,28	12,56
16	140	4,94...	0,36576	4,58	13,72
17	210	5,34...	0,35734	4,99	15,25
18	210	5,34...	0,34962	5,00	15,70
19	420	6,04...	0,34252	5,70	17,76
20	420	6,04...	0,33595	5,71	18,30
...	...	...	...	...	...

**Osservazioni:** come si vede, però, anche con i logaritmi integrali,  $\ln g(n)$  è anch'esso maggiore di  $\sqrt{Li(n)}^{-1}$  (radice quadrata dell'inverso del logaritmo), invece che minore, e quindi contrariamente a quanto afferma la disuguaglianza

$$\ln g(n) < \sqrt{Li^{-1}(n)} \quad \text{come ipotesi RH equivalente}$$

**per la quale invece deve essere minore**

## **Frattalità delle partizioni.**

Ken Ono ha scoperto che anche le partizioni hanno caratteristica di frattalità, come già noto per la serie dei numeri di Fibonacci.

Ma anche i numeri di Lie, e quindi i gruppi di simmetria, hanno tale proprietà (che conferisce regolarità e stabilità ai fenomeni naturali in cui esse compaiono nelle descrizioni matematiche);

forse perché tutte e tre si originano dalla formula delle geometrie proiettive  $L(n) = n^2 + n + 1 = 2T + 1$  con  $n$  numero primo o una sua potenza, e  $T$  numeri triangolati;  $2T$  è anche la somma dei

primi  $n$  numeri pari. I valori di  $L(n)$  si trovano esattamente a metà strada tra due quadrati, essendo la differenza tra due quadrati

uguale a  $2n + 1 = n + n + 1$ : togliendo una  $n$ , rimane  $n+1$ , insieme al quadrato precedente. Per esempio:

$9^2 + 9 + 9 + 1 = 81 + 9 + 9 = 100 = 10^2$ : se togliamo  $n = 9$ ,

rimangono  $81 + 9 = 90$ , e  $90 + 1 = 91$ , con 91 numero di Lie,

prossimo a 89 numero di Fibonacci (vedi Nota 4).

La formula dei numeri di Fibonacci è infatti

$F(n) = n^2 + n \pm c$ , con  $c$  numero molto piccolo (spesso intorno alla radice quadrata di  $n$ ), mentre la formula per le partizioni è

$p(n) = n^2 + n + c'$  con  $c'$  un po' più grande di  $c$ . Per un valore di  $p(n)$  vicino a 89, e a 91, abbiamo:

$$89 = 9^2 + 9 - 1 \text{ con } c = -1$$

$$91 = 9^2 + 9 + 1$$

Per il numero di partizione più vicino, 101, abbiamo invece

$$101 = 9^2 + 9 + 11 \text{ con } c' = 11 = 101 - 90, \text{ con } 90 = 9^2 + n$$

Concludiamo con uno schema generale delle connessioni, dai numeri primi dell'equazione delle geometrie proiettive  $n^2+n+1$ , ai numeri di Fibonacci, di Lie e partizioni di numeri, ecc. ecc. fino alle teorie di stringa e ai fenomeni naturali e cosmologici, di tipo frattale:

# Geometria proiettiva

$$n^2+n+1$$

(con n primo o potenza di rimo)

$$F(n) \approx n^2 + n + c$$

Fibonacci  
(frattali)

$$p(n) \approx n^2+n \pm c'$$

Partizioni di numeri  
(frattali)

$$L(n) = n^2 + n + 1$$

Numeri di Lie

## Gruppi di simmetria

Gruppi eccez. di Lie, es.E8

**Zeta di Fibonacci**

(tramite  $\Phi$ )

**Funzione di Landau**

tramite  $p(n)$

**Teoria di stringa  $\rightarrow$  TOE ( es. E8)**

## Fenomeni naturali (frattali)

**Quantistici**

(livelli energetici  
degli atomi)  
spirali,ecc.)

(funzione zeta,  $p(n)$ )

**Chimici**

(niobato di cobalto)

(  $\Phi$ , E8 )

(stato critico quantistico  
corrispondente ai frattali)

**Cosmologici**

(galassie)

(  $\Phi$ ,  $p(n)$  )



Per il nostro scopo (proposta di dimostrazione della funzione di Landau come ipotesi RH equivalente), nel seguito riporteremo tabella e grafico comet (Rif.3)

Riprendiamo la lista dei valori di  $Li(x)$  con  $x$  da 3 a 20 inviataci dal Sig. Cristiano Armellini (vedi sito finale in Rif.7), che confronteremo con  $\ln g(n)$  per lo studio e il grafico di tipo comet, forte indizio della verità dell'ipotesi RH equivalente basata sulla funzione di Landau:

**“ NIntegrate[1/Log[x], {x, 2, 20}]**

**x = 3 L(i) = 1.11842**  
**x = 4 L(i) = 1.92242**  
**x = 5 L(i) = 2.58942**  
**x = 6 L(i) = 3.17706**  
**x = 7 L(i) = 3.71189**  
**x = 8 L(i) = 4.20855**  
**x = 9 L(i) = 4.67607**  
**x = 10 L(i) = 5.12044**  
**x = 11 L(i) = 5.54585**  
**x = 12 L(i) = 5.95538**  
**x = 13 L(i) = 6.35138**  
**x = 14 L(i) = 6.73566**  
**x = 15 L(i) = 7.10966**  
**x = 16 L(i) = 7.47455**  
**x = 17 L(i) = 7.83130**  
**x = 18 L(i) = 8.18071**  
**x = 19 L(i) = 8.52346**  
**x = 20 L(i) = 8.86014**

ed una tabella con gli inversi, poi perfezionata e corredata dal seguente

grafico, dal prof. Eugenio Amitrano, curatore del sito “Atuttoportale”:

[www.atuttoportale.it/](http://www.atuttoportale.it/) con articoli di matematica, anche nostri (su

Fibonacci, ecc.) in sezione “Didattica”):

“Funzione logaritmo integrale:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$$

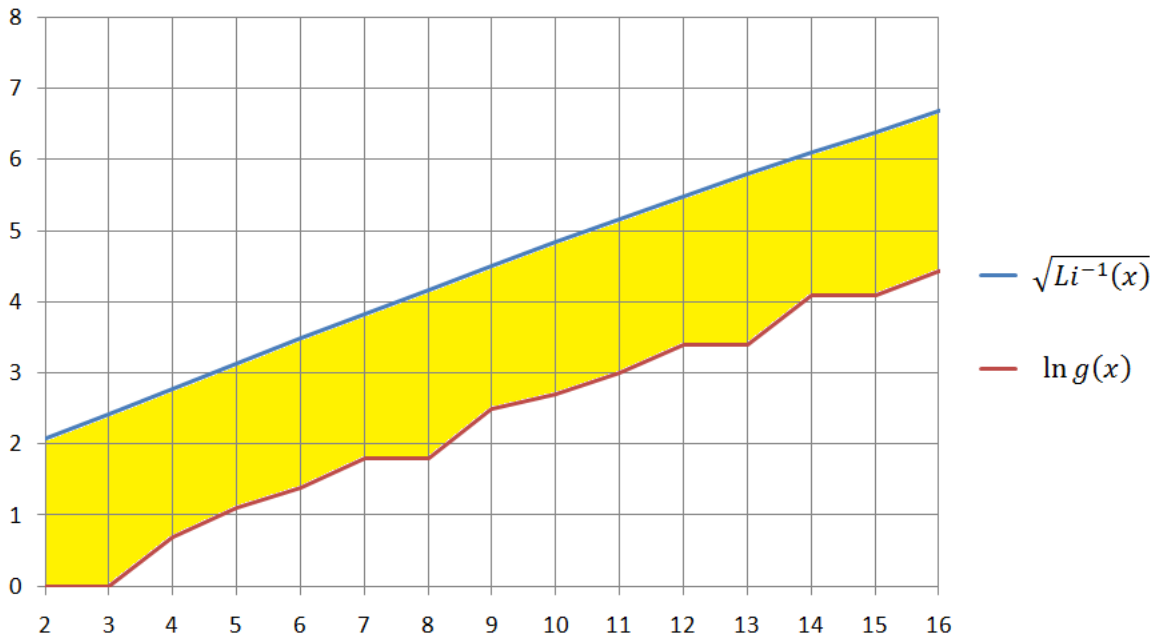
Polinomio che meglio approssima la funzione inversa del logaritmo integrale  $\forall x \in ]1, 20]$

$$Li^{-1}(x) \sim -0,0026x^3 + 0,1547x^2 + 0,8541x + 2$$

**TABELLA DEI VALORI**

$x$	$Li(x)$	$Li^{-1}(x)$	$\sqrt{Li^{-1}(x)}$	$g(x)$	$\ln g(x)$
2	0,0000	4,3062	2,0751	1	0,0000
3	1,1184	5,8844	2,4258	1	0,0000
4	1,9224	7,7252	2,7794	2	0,6931
5	2,5894	9,8130	3,1326	3	1,0986
6	3,1771	12,1322	3,4831	4	1,3863
7	3,7119	14,6672	3,8298	6	1,7918
8	4,2086	17,4024	4,1716	6	1,7918
9	4,6761	20,3222	4,5080	12	2,4849
10	5,1204	23,4110	4,8385	15	2,7081
11	5,5458	26,6532	5,1627	20	2,9957
12	5,9554	30,0332	5,4803	30	3,4012
13	6,3514	33,5354	5,7910	30	3,4012
14	6,7357	37,1442	6,0946	60	4,0943
15	7,1097	40,8440	6,3909	60	4,0943
16	7,4746	44,6192	6,6798	84	4,4308

Grafico per la verifica dell’affermazione di Landau sul Logaritmo integrale



Notiamo che l'inverso di  $Li(x)$  è a prima vista circa 1,5 volte  $\ln g(n)$ , e quindi il loro rapporto è quasi costante, cosicché non potrà mai essere minore di  $\ln g(n)$  come contro esempio ; la disuguaglianza di Landau è confermata all'infinito, e pertanto la funzione di Landau come ipotesi RH equivalente è vera, e quindi anche la RH è vera. Vedi grafici dopo la seguente tabella :

**TABELLA 2**  
sui suddetti rapporti

$x$	Rapporti $\sqrt{\text{Li}(x)^{-1}} / \ln g(x)$	Differenze $\sqrt{\text{Li}(x)^{-1}} - \ln g(x)$
2	-	
3	-	
4	4,01	2,08
5	3,85	2,03
6	2,51	2,09
7	2,13	2,03
8	2,32	2,37
9	1,81	2,02
10	1,78	2,13
11	1,72	<b>2,16</b>
12	1,61	2,07
13	1,70	2,38
14	1,48	2,00
15	1,56	2,29
16	1,50	2,24
...	...	...

Con una media aritmetica, per quanto riguarda i rapporti, di

$$\mathbf{S/13 = 28,3/13 = 2,17}$$

se invece togliamo i primi cinque valori anomali, maggiori della media, otteniamo

$$\mathbf{S/8 = 13,16/8 = 1,645}$$

numero leggermente superiore al numero aureo 1,618..., valore al quale sembra tendere la media aritmetica dopo i primi cinque valori anomali (superiori a 2).

Ma 1,645 è prossimo anche alla radice quadrata 1,648...di  $e = 2,718...$ , altra importante costante matematica. Ulteriori ricerche lo confermeranno.

In ogni caso, la differenza è sempre positiva e soddisfa la disequazione di Landau come ipotesi RH equivalente.

Per quanto riguarda le differenze, invece, non ci sono anomalie iniziali, e la media aritmetica è di

$$S' / 13 = 27,89/13 = 2,14$$

molto vicina alla media 2,17 dei rapporti, compresi i cinque valori iniziali.

Le differenze successive al crescere di  $x$  sembrano aumentare, poiché la media delle prime otto differenze è maggiore della media dei successivi otto valori:

$$\text{media primi sette valori} = S'' / 7 = 14,68/7 = 2,09$$

$$\text{media secondi sei valori} = S''' / 6 = 13,14/6 = 2,19$$

contro una media totale di 2,14.

Il che conferma ancora la disequazione di Landau, con differenza sempre crescente, e quindi sempre più lontana dal contro esempio

$$\sqrt{\text{Li}(x)}^{-1} - \ln g(x) = 0, \text{ poiché, per tutti gli } x > 3, \sqrt{\text{Li}(x)}^{-1} - \ln g(x) > 0,$$

$$\text{e quindi} \quad \ln g(n) < \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} \quad (\text{ qui } n = x \text{ delle nostre tabelle})$$

**Con ciò, la funzione di Landau come ipotesi RH equivalente è dimostrata.**

## Connessioni con i numeri di partizione

### *Stime logaritmiche*

Qui vogliamo anche mostrare qualche formula per una stima

logaritmica attendibile dei numeri connessi alla funzione di

Landau, fino a valori successivi di  $N = 10^n$ , tramite la seguente

tabella, basata sulla sequenza : 1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105

...;

(per le ripetizioni , sono contate una sola volta)

N	$N = 10^n$	Numeri di $a(n)$ fino a $10^n$	$\ln(10^n)$	Rapporto $a(n) / \ln N$
1	10	<b>6</b>	2,30	2,60
2	100	<b>11</b>	4,60	2,39
3	1 000	<b>18</b>	6,90	2,60
4	10 000	<b>23</b>	9,21	2,49
5	100 000	<b>29</b>	11,51	2,51
...	...	...	...	...

La formula logaritmica per una stima attendibile di  $a(n)$  senza

ripetizioni, è quindi  $a(n) \approx 2,51 * \ln(10^n)$ , essendo 2,398 la

media aritmetica  $12.59 / 5 = 2,518$  tra i primi cinque rapporti

$a(n)/\ln(10^n)$ . Arrotondando, possiamo anche calcolare la media



La funzione di Landau cresce mediamente quindi di circa  $\ln(n)*2,50$ . E 2,50 è prossimo alla radice quadrata di 6 , poiché  $\sqrt{6} = 2,4494... \approx \mathbf{2,50}$ .

Un'altra cosa interessante è che i rapporti successivi tra i valori di  $g(n)$  tendono a  $1,2720 = \sqrt{1,618}$ : infatti

- 11/6 = 1,8333
- 18/11 = 1,6363
- 23/18 = 1,2777
- 29/23 = 1,2608
- 36/29 = 1,2413 , con 36 stimato

... ..  
 e quindi una possibile sospetta relazione con  $\Phi = 1,618...$

Ma tendono anche a  $1,2574 = \sqrt{\sqrt{2,50}}$  , radice quarta di 2,50.

Ulteriori confronti tra i valori reali e i valori stimati confermeranno o meno tali stime logaritmiche approssimative

### TABELLA

per i numeri  $g(n)$  della funzione di Landau

Sequenza  $g(n)$  : **1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, 30, 60, 60, 84, 105 ...;**

(di questi numeri, **1, 3, 6, 15, 105**, e poi anche **210** e **1540**, sono

numeri triangolari T essi stessi; e **210\*2 = 420 = 2T** è anche



un numero della serie di Landau)

$$g(n) \approx 2T \pm c'', \text{ con } c'' \text{ da } 0 \text{ a } 6$$

2T-3	2T-2	2T-1	<b>2T</b>	2T+1	2T+2	2T+3	a(n)	Diff. 2T - a(n) = c''
-1	0	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	5	<b>2</b>	0
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	5	<b>6</b>	7	<b>4</b>	0
9	10	11	<b>12</b>	13	14	<b>15</b>	<b>12</b>	0
17	18	19	<b>20</b>	21	22	23	<b>20</b>	0
27	28	29	<b>30</b>	31	32	33	<b>30</b>	0
39	40	41	<b>42</b>	43	44	45		
53	54	55	<b>56</b>	57	58	59≈ <b>60</b>	60	-4
69	70	71	<b>72</b>	73	74	75		
<b>84</b> ≈87	88	89	<b>90</b>	91	92	93		+6
<b>105</b> ≈107	108	109	<b>110</b>	111	112	113		+5
129	130	131	<b>132</b>	133	134	135		
...	...	...	...	...	...	...		

Nota: **84**= **90** - 6 , **105** = **110** - 5, **60** = **56** +4, quindi anch'essi prossimi a 2T, come **3**, **6** e **15** mentre **2**, **4**, **12**, **20** e **30** sono perfettamente coincidenti con numeri di forma 2T, il che non può essere una casualità. Succede la stessa cosa con altri numeri emersi da calcoli relativi ad alcuni fenomeni considerati in lavori precedenti, vedi Riferimenti finali (Rif.4), sul sito

<http://nardelli.xoom.it/virgiliowizard/> del Dott. Nardelli : in

particolare l'articolo "**On some applications of the Eisenstein series in String Theory. Mathematical connections with some sectors of Number Theory and with  $\Phi$  and  $\pi$** ", vedi nelle

Tabelle finali

**Altre connessioni con le partizioni**

*Ricorsività delle tre serie di numeri: Fibonacci, Lie, partizioni*

*Connessioni con i numeri quadrati*

Dal recente libro di Alex Bellos "Il meraviglioso mondo dei numeri" (Einaudi) riportiamo un brano sulla ricorsività dei numeri di Fibonacci in molti fenomeni naturali: la nostra osservazione è che essendo ricorsivi o parzialmente ricorsivi (ottenibili da somme di numeri precedenti nella stessa serie) anche i numeri di Lie e le partizioni di numeri, ci sembra di notare una certa loro "divisione dei compiti": i numeri di Fibonacci sono i preferiti dai fenomeni biologici ( fiori, foglie, conchiglie, conigli, ecc. ecc.), mentre i numeri di Lie e le partizioni di numeri sono i preferiti dai fenomeni fisici (le simmetrie nel Modello Standard e nelle teorie di stringa, le partizioni nei livelli energetici degli atomi, ecc.), ma tutti e tre i tipi di numeri sembrano preferire la media aritmetica tra due quadrati perfetti, ossia porsi a metà strada tra due quadrati (vedi Tabella

successiva, con le loro radici quadrate); i più “bravi” nel posizionarsi per primi in questi punti sono i numeri di Lie, essendo della forma  $L(n) = n^2 + n + 1$ , cioè a metà strada tra  $n^2$  e  $(n+1)^2$ , essendo  $2n + 1$  la distanza tra due quadrati qualsiasi.

Non comprendiamo ancora il motivo per cui la natura preferisce questi punti (minore sforzo energetico? O altro?); ma è già qualcosa, per noi, l’aver notato tale preferenza numerica, in perfetto stile pitagorico o anche galileiano (l’universo è basato sui numeri)

“ ...Una caratteristica importante della sequenza di Fibonacci è che è *ricorsiva*, il che significa che ogni nuovo termine è generato dai valori dei termini precedenti. Ciò contribuisce a spiegare perché i numeri di Fibonacci siano così diffusi nei sistemi naturali. Molte forme di vita crescono mediante un processo di ricorrenza.”

Vediamo ora, con una tabella, le tre serie di numeri e le loro radici quadrate (poiché la parte decimale della radice quadrata cresce lentamente da un quadrato al successivo, ed è **0,50** a metà strada, possiamo notarlo nelle radici quadrate, con parte decimale  $\approx 0,50$ , e  $\rightarrow 0,50$ , dei numeri delle tre serie più vicini tra loro):

Tabella

Fibonacci F(n)	$\sqrt{F(n)}$	Lie L(n)	$\sqrt{L(n)}$	Partizioni p(n)	$\sqrt{p(n)}$
1	1	1	1	1	1
1	1			1	1
2	1, <b>41</b>			2	1, <b>41</b>
3	1,73	3	1,73	3	1,73
5	2,23			5	2,23
8	2,82	7	2, <b>64</b>	7	2, <b>64</b>
13	3, <b>60</b>	13	3, <b>60</b>	15	3,87
21	4, <b>58</b>	21	4, <b>58</b>	22	4,69
34	5,83	31	5, <b>56</b>	30	5, <b>47</b>
55	7, <b>41</b>	57	7, <b>54</b>	56	7, <b>48</b>
89	9, <b>43</b>	91	9, <b>53</b>	101	10,04
144	12,00			135	11, <b>61</b>
233	15,26	241	15, <b>52</b>	231	15,19
377	19, <b>41</b>	381	19, <b>51</b>	385	19, <b>62</b>
610	24,69	601	24, <b>51</b>	627	25,03
987	31, <b>41</b>	993	31, <b>51</b>	1002	31, <b>65</b>
1597	39,96	1561	39, <b>50</b>	1575	39,68
2584	50,83	2551	50, <b>50</b>	2436	49,35
...	...	...	...	...	...

Notiamo sette numeri (su diciotto) con radici quadrate in rosso nella serie di Fibonacci fino a 2584 , 12 nei numeri di Lie fino a 2551 e sette nelle partizioni di numeri fino a 2436: I numeri di Lie fanno la parte del leone, essendo di forma  $L(n) = n^2 + n + 1$ , mentre le altre tre serie sono un po' più distanti da tale formula, poiché:

$$F(n) \approx n^2 + n \pm c \quad p(n) \approx n^2 + n \pm c', \quad \text{con } c \text{ e } c' \text{ numeri piccoli,}$$

mediamente dell'ordine di  $\sqrt{n}$ .

La radice quadrata dei numeri di Fibonacci, ha come parte decimale più frequente ricorsiva 0,**41**, mentre la radice quadrata dei numeri di partizioni ha come parte decimale più regolare e frequente 0,**61**, 0,**62**, 0,**65** leggermente crescente. Mentre per i numeri di Lie, ovviamente, è 0,**50**, come circa la media aritmetica tra 0,**41** e 0,**62**, che quindi sono quasi simmetrici rispetto al valore 0,**50** dei numeri di Lie.

Circa la ricorsività di tali numeri (Fibonacci, Lie e partizioni), essa è perfetta per i numeri di Fibonacci ( un numero di Fibonacci , com'è noto, è esattamente la somma dei due numeri precedenti), mentre per i numeri di Lie è meno perfetta , specialmente all'inizio, per numeri di Lie più grandi tende ad una maggiore perfezione, per esempio  $993 + 1561 = 2554$ , molto prossimo a 2551.

La ricorsività per i numeri di Lie è perfetta invece come  $1 + i$  numeri pari successivi consecutivi; per es.:  $31 = 1 + 20 + 10 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ , cioè  $1 + i$  primi quattro  $n$  numeri pari.

Per trovare facilmente un numero di Lie  $L(n \rightarrow L(n+1))$  a partire dal precedente  $L(n)$  , occorre aggiungervi il doppio della parte intera della sua radice quadrata e 2 , cioè  $2\sqrt{L(n)} + 2$  ; per esempio per **31**, il prossimo

numero di Lie è  $31 + 2\sqrt{31} = 31 + 2*5 = 31 + 10 + 2 = \mathbf{43}$ ;

il prossimo numero di Lie sarà  $43 + 2\sqrt{43} + 2 = 43 + 12 + 2 = \mathbf{57}$ , dove, in generale,  $2\sqrt{L(n)}$  intero è l'ennesimo numero pari da aggiungere ai precedenti. Infatti  $21 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8$ , il prossimo numero pari per arrivare a 31 è  $10 = 2\sqrt{31}$  intero, poiché  $\sqrt{31} = \mathbf{5,56}$ .

Ma ancora più semplice è considerare l'**intero superiore** della radice quadrata, con solo  $2\sqrt{L(n)}$ , in tal modo si elimina il + 2:

riepilogando:  $L(n+1) = L(n) + 2\sqrt{L(n)}$  int. sup.: per  $\sqrt{31} = \mathbf{5,56} \approx \mathbf{6}$  si considera quindi  $2*6 = 12$ , e quindi  $\mathbf{31} + 12 = \mathbf{43}$  numero di Lie successivo a 31. Questa relazione è nuova, appena scoperta, e quindi inedita, e mostra una ricorsività numericamente rigorosa per i numeri di Lie.

Per le **partizioni** invece, la loro ricorsività anch'essa è meno perfetta rispetto alla serie di Fibonacci; la ricorsività è leggermente migliore se si prendono quattro numeri consecutivi: il quarto è circa la somma del primo e del terzo, anziché del secondo e del terzo come nei numeri di Fibonacci (per i quali bastano tre numeri consecutivi, con il terzo uguale alla somma del primo e del secondo): per esempio, per le prime quaterne:

1°	2°	3°	4°	4° ≈	1° + 3°		
1	1	2	3	3	≈	1 + 2	= 3
1	2	3	5	5	≈	1 + 3	= 4
2	3	5	7	7	≈	2 + 5	= 7
3	5	7	11	11	≈	3 + 7	= 10
5	7	11	15	15	≈	5 + 11	= 14
7	11	15	22	22	≈	7 + 15	= 22
11	15	22	30	30	≈	11 + 22	= 33
15	22	30	42	42	≈	15 + 30	= 45
...	...	...	...	...	...	...	...

Per quaterne più grandi funziona meno bene :

$$\begin{array}{l}
 385 \quad 490 \quad 627 \quad 792 \quad 792 \approx 385 + 627 = 1012 \\
 490 \quad 627 \quad 792 \quad 1002 \quad 1002 \approx 490 + 792 = 1282
 \end{array}$$

Ma il 4° numero è ora più vicino alla somma del 1° e del 2° anziché del 1° e del 3° :

$$\begin{array}{l}
 792 \approx 385 + 490 = 875 \\
 1002 \approx 490 + 627 = 1117
 \end{array}$$

Quindi la ricorsività non è molto perfetta nei numeri di partizione, come pure nei numeri di Lie, a differenza dei numeri di Fibonacci; ma la Natura se ne serve lo stesso per alcuni fenomeni, e forse con minore frequenza rispetto ai numeri di Fibonacci, che invece, come abbiamo visto, hanno una **ricorsività perfetta** circa la somma dei due numeri precedenti.

Ricorsività, infine, significa anche **frattalità** dei rispettivi fenomeni

naturali , comune sia ai numeri di Fibonacci che alle partizioni di numeri ,  
 ma anche alle simmetrie dei numeri di Lie , come si è visto nello stato  
 quantistico critico del niobato di cobalto, dove emerge il gruppo di  
**simmetria E8.**

### Connessioni con $\Phi$ e $\pi$

Riprendiamo la seguente tabella, precedentemente analizzata e su cui si  
 basa gran parte di questo articolo.

**TABELLA DEI VALORI**

$x$	$Li(x)$	$Li^{-1}(x)$	$\sqrt{Li^{-1}(x)}$	$g(x)$	$\ln g(x)$
2	0,0000	4,3062	2,0751	1	0,0000
3	1,1184	5,8844	2,4258	1	0,0000
4	1,9224	7,7252	2,7794	2	0,6931
5	2,5894	9,8130	3,1326	3	1,0986
6	3,1771	12,1322	3,4831	4	1,3863
7	3,7119	14,6672	3,8298	6	1,7918
8	4,2086	17,4024	4,1716	6	1,7918
9	4,6761	20,3222	4,5080	12	2,4849
10	5,1204	23,4110	4,8385	15	2,7081
11	5,5458	26,6532	5,1627	20	2,9957
12	5,9554	30,0332	5,4803	30	3,4012
13	6,3514	33,5354	5,7910	30	3,4012
14	6,7357	37,1442	6,0946	60	4,0943
15	7,1097	40,8440	6,3909	60	4,0943
16	7,4746	44,6192	6,6798	84	4,4308

Andiamo ad analizzare la terza e la sesta colonna:

$Li^{-1}(x)$
<b>4,3062</b> 4,3634568335380 (Sistema * 1/π) 4,3636363636363 (Sistema * 1/1,375)
<b>5,8844</b> 5,8835178875896 (Sistema * 1/π)



5,8837599590905 (Sistema * 1/1,375)
<b>7,7252</b>
7,7016249015637 (Sistema * 1/π) 7,7019417772723 (Sistema * 1/1,375)
<b>9,8130</b>
9,7080551936273 (Sistema * π) 9,7076557817703 (Sistema * 1,375)
<b>12,1322</b>
12,1354408420627 (Sistema * 1/π)
<b>14,6672</b>
14,5620827904409 (Sistema * π) 14,5614836726554 (Sistema * 1,375)
<b>17,4024</b>
17,4744993485292 (Sistema * π) 17,4737804071864 (Sistema * 1,375)
<b>20,3222</b>
20,1631157608962 (Sistema * 1/π) 20,1639453522715 (Sistema * 1/1,375)
<b>23,4110</b>
23,2993324647056 (Sistema * π) 23,2983738762486 (Sistema * 1,375)
<b>26,6532</b>
26,6160000764404 (Sistema * π) 26,6975608143731 (Sistema * 1,375)
<b>30,0332</b>
30,4992221538913 (Sistema * π) 30,4979673453106 (Sistema * 1,375)
<b>33,5354</b>
33,2700000955505 (Sistema * π) 33,2686312907529 (Sistema * 1,375)
<b>37,1442</b>
37,3844725779977 (Sistema * 1/π) 37,3860107249974 (Sistema * 1/1,375)
<b>40,8440</b>
40,3262315217924 (Sistema * 1/π) 40,3278907045428 (Sistema * 1/1,375)
<b>44,6192</b>
44,8613670935971 (Sistema * 1/π) 44,8632128699972 (Sistema * 1/1,375)
<b>ln g(x)</b>
<b>0,0000</b>
<b>0,0000</b>
<b>0,6931</b>
0,6944550841536 (Sistema * 1/π) 0,6944836568184 (Sistema * 1/1,375)
<b>1,0986</b>
1,0942520181039 (Sistema * 1/π)
<b>1,3863</b>
1,3889101683071 (Sistema * 1/π) 1,3889673136368 (Sistema * 1/1,375)
<b>1,7918</b>
1,7979170581815 (Sistema * 1/1,375)

<b>1,7918</b>
<b>2,4849</b> 2,4720980795372 (Sistema * $\pi$ )
<b>2,7081</b> 2,6967646315695 (Sistema * $1/\pi$ ) 2,6968755872723 (Sistema * $1/1,375$ )
<b>2,9957</b> 2,9999540371608 (Sistema * $\pi$ ) 2,9998306121092 (Sistema * $1,375$ )
<b>3,4012</b> 3,3993267942955 (Sistema * $\pi$ ) 3,3991869381244 (Sistema * $1,375$ )
<b>3,4012</b>
<b>4,0943</b> 4,1251697190287 (Sistema * $\pi$ ) 4,1250000000000 (Sistema * $1,375$ )
<b>4,0943</b>
<b>4,4308</b> 4,4497765431669 (Sistema * $\pi$ ) 4,4495934690622 (Sistema * $1,375$ )

Notiamo, dai valori riportati in basso, le evidentissime connessioni matematiche con Pigreco, Phi e la costante 1,375 connessa con le partizioni di un numero e a sua volta connessa con Pigreco e Phi , più specificamente connessioni con alcuni valori "musicali" inerenti Pigreco, Phi e il numero 1,375 (musicali in quanto basate sul Sistema musicale Aureo, inventato dal musicista Giuseppe Bini e dall'Ing. Christian Lange, a cui il Nardelli ha contribuito dal punto di vista matematico). Riguardo la voce "Sistema" essa comprende i valori di Phi del Sistema musicale aureo, già elencati nell'Appendice B del lavoro: **"On some applications of the Eisenstein series in String Theory. Mathematical connections with some sectors of Number Theory and with  $\Phi$  and  $\pi$ "**

### *Nota 1*

### **Notizia della scoperta di una nuova formula di Ken Ono**

Riportiamo per intero la notizia data dal sito di Maddmaths:

[maddmaths.simai.eu/...di.../dietro-le-partizioni-dei-numeri-si-nascondo-i-frattali](http://maddmaths.simai.eu/...di.../dietro-le-partizioni-dei-numeri-si-nascondo-i-frattali)

# “Dietro le partizioni dei numeri si nascondo...i frattali!

Per secoli alcuni dei matematici più famosi si sono interessati allo studio delle partizioni dei numeri, senza riuscire a definire una teoria completa e lasciando irrisolte molte domande.



In un recente studio, il matematico Ken Ono dell'Università di Emory, ha ideato una nuova teoria che è in grado di rispondere ad antiche e note domande sulle partizioni di un numero, (ovvero sequenze di numeri positivi che sommati danno quel numero).

Ken Ono e il suo gruppo di ricerca, hanno infatti scoperto che le partizioni dei numeri primi si comportano in realtà come frattali. Le proprietà di divisibilità delle partizioni individuate, hanno permesso di vedere come la loro sovrastruttura si ripeta infinitamente.

Inoltre hanno ideato la prima formula finita per calcolare le partizioni di qualsiasi numero.

“Il nostro lavoro si basa su idee completamente nuove per questi problemi” ha detto Ono. “Noi abbiamo provato che le partizioni dei numeri primi sono “frattali”. Il nostro procedimento di ingrandimento risolve molte delle congetture ancora aperte e può cambiare il modo in cui i matematici studiano le partizioni.”

Questo lavoro è stato finanziato dall'American Institute of Mathematics (AIM) e dal National Science Foundation. Lo scorso anno l'AIM ha raggruppato i maggiori esperti mondiali sulle partizioni, incluso Ono, per risolvere alcuni dei più importanti problemi aperti in questo campo. Ono, professore sia dell'Università di Emory che dell'Università del Wisconsin a Madison, ha guidato il gruppo formato da: Jan Bruinier della Technical University di Darmstadt in Germania, Amanda Folsom dell'Università di Yale e Zach Kent post doc dell'Università di Emory.

“Ken Ono ha ottenuto scoperte assolutamente straordinarie nella teoria delle partizioni”, ha affermato George Andrews, professore alla Pennsylvania State e presidente della American Mathematical Society. “Ha dimostrato le proprietà di divisibilità della funzione partizione e ciò è stupefacente. Ha fornito un sovrastruttura a cui nessuno prima di lui aveva pensato. E' un fenomeno.”

La partizione di un numero può sembrare quasi un gioco per la sua semplicità. Ad esempio  $4=3+1=2+2=1+1+1+1$ . Esistono quindi 5 partizioni del numero 4. Fin qui tutto è semplice ma, le partizioni dei numeri aumentano con un tasso incredibile. Ad esempio il numero totale delle partizioni del numero 10 è 42. Mentre per il numero 100, le partizioni superano 190.000.000.

“Le partizioni dei numeri sono folli sequenze di interi che vanno verso l’infinito” ha affermato Ono “tale successione suscita meraviglia ed ha affascinato i matematici per molto tempo”.

Nonostante la semplicità della definizione, fino alle scoperte del gruppo di Ono, nessuno era stato in grado di svelare il segreto della complessa struttura che si nascondeva dietro questa rapida crescita.

Nel diciottesimo secolo il matematico Eulero ha sviluppato una prima tecnica ricorsiva per calcolare il valore delle partizioni dei numeri. Il metodo però era lento e comunque non praticabile per numeri grandi.

Nei successivi 150 anni tale metodo è stato implementato con successo per calcolare solo partizioni dei primi 200 numeri. “Nell’universo matematico ciò significa di non essere in grado di vedere oltre Marte” ha detto Ono.

Agli inizi del ventesimo secolo Srinivasa Ramanujan e G. H. Hardy hanno inventato il metodo circolare che è in grado di ottenere una prima approssimazione delle partizioni per i numeri oltre 200. Ma tale metodo essenzialmente non aspirava a cercare una risposta esatta, “accontentandosi” di un’approssimazione.

Anche Ramanujan aveva osservato strane strutture nella partizione dei numeri. Nel 1919 aveva notato che il numero di partizioni del numero  $5n+4$  (rispettivamente  $7n+5$ ,  $11n+6$ ) era un multiplo di 5 (rispettivamente 7, 11).

Nel 1937 Hans Rademacher trovò una formula esatta per calcolare il valore delle partizioni. Anche se questo metodo era un grande miglioramento rispetto alla formula esatta di Eulero, richiedeva la somma di una serie di numeri che avevano infinite cifre decimali.

Nei decenni successivi, diversi matematici hanno continuato a studiare tale problema, aggiungendo dei tasselli mancanti a questo puzzle. Ma, nonostante i progressi fatti, non sono stati in grado di trovare una formula finita per la partizione dei numeri.

Il “dream team” di Ono ha studiato il problema per mesi. “Qualsiasi cosa provavamo non funzionava” ha detto il leader del gruppo. Il punto di svolta è avvenuto inaspettatamente lo scorso settembre, quando Ono e Zach Kent stavano facendo un’escursione alle cascate Tallulah in Georgia. Mentre stavano camminando attraverso i boschi, hanno notato la struttura dei gruppi di alberi, ed hanno iniziato a pensare a come potesse essere camminare attraverso le partizioni dei numeri. “Eravamo in cima a delle enormi rocce dove potevamo vedere tutta la valle ed ascoltare il rumore delle cascate, quando abbiamo realizzato che le partizioni dei numeri sono frattali” ha detto Ono “ed entrambi abbiamo iniziato a ridere”.

Il termine frattale fu inventato nel 1980 da Benoit Mandelbrot, per descrivere ciò che sembra irregolare nella geometria delle forme naturali. Un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d’ingrandimento.

Con la loro semplice camminata nei boschi Ono e Kent hanno ideato una teoria che rivela una nuova classe di frattali “E’ come se non avessimo bisogno di vedere tutte le stelle nell’universo perché la struttura continua a ripetersi per sempre, e quindi può essere vista in una camminata di 3 miglia alle cascate Tallulah” ha detto Ono.

Con questa teoria dei frattali è possibile provare le congruenze di Ramanujan. Il gruppo ha dimostrato che le proprietà di divisibilità delle partizioni dei numeri sono frattali per ogni numero primo. “Le successioni sono tutte eventualmente periodiche e si ripetono più e più volte ad intervalli precisi”, ha affermato Ono, aggiungendo “E’ come ingrandire in un insieme di Mandelbrot” riferendosi al più famoso frattale.

Ma questa straordinaria visione dentro la sovrastruttura della partizione dei numeri non era sufficiente per il gruppo di ricercatori, determinato ad andare oltre la teoria e trovare una formula che potesse essere implementata.

L’altro episodio fondamentale per la loro ricerca, è avvenuto in un altro noto luogo della Georgia, la “spaghetti function”. Ono e Jan Bruinier erano bloccati nel traffico nei pressi del noto scambio per Atlanta. Mentre stavano chiacchierando in macchina, cercavamo di trovare un modo per eliminare l’infinita complessità del metodo di Rademache. Il loro obiettivo era quello di provare una formula che richiedesse solo un numero finito di numeri.



“Abbiamo trovato una funzione, P, che è una sorta di oracolo magico” ha affermato Ono. “Posso prendere qualsiasi numero, inserirlo dentro P ed istantaneamente calcolare le partizioni di quel numero. P non dà come risultato un numero terribile con infinite cifre decimali. E’ quella formula algebrica finita che stavamo tutti cercando.”

Il lavoro di Ono e dei suoi colleghi è descritto in due lavori che saranno presto disponibili sul sito del AIM. “

## NOTA 2

### *Precedente formula di Ramanujan*

Dal sito Robiland di Roberto Brogi :

[digilander.libero.it/roberto20129/index.html](http://digilander.libero.it/roberto20129/index.html)

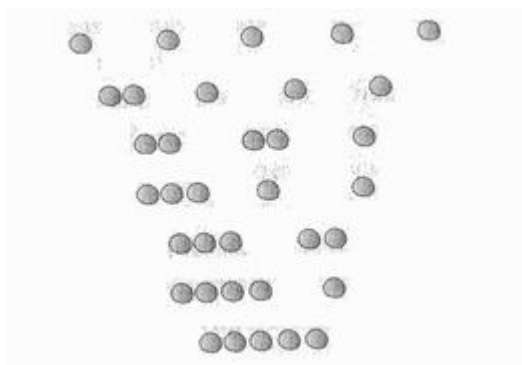
## “Srinivasa Ramanujan

*Un'equazione non significa nulla per me se non esprime un pensiero di Dio”*

Insieme a Hardy, comunque, Ramanujan continuò la sua esplorazione di proprietà dei numeri correlate. Le idee che lui e Hardy elaborarono avrebbero contribuito al primo passo avanti sulla strada di una dimostrazione della congettura di Goldbach, che cioè ogni

numero pari è la somma di due numeri primi. Quel progresso giunse per via indiretta, ma il suo punto di partenza fu l'ingenua fiducia di Ramanujan nell'esistenza di formule esatte per esprimere importanti sequenze numeriche come quella dei numeri primi. Nella stessa lettera in cui egli sosteneva di aver trovato una formula per i numeri primi, affermava di aver compreso come generare un'altra sequenza rimasta fino ad allora indomata: quella delle partizioni di un numero intero.

Quanti modi diversi ci sono di dividere cinque pietre in pile distinte? Il numero delle pile varia da un massimo di cinque pile composte da una sola pietra a una sola pila composta da cinque pietre, con un certo numero di possibilità intermedie: I sette modi possibili di ripartire cinque pietre.



Tali possibilità distinte sono chiamate le partizioni del numero 5. Come mostra l'illustrazione, esistono sette possibili partizioni di 5.

Ed ecco qual è il numero di partizioni per i numeri interi che vanno da 1 a 15:

Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Partizioni	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Questa è una delle sequenze numeriche che abbiamo incontrato nel capitolo 2. Sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere : il modo in cui cresce il numero delle partizioni.

La distribuzione di questi numeri non appare casuale quanto quella dei numeri primi, ma la generazione di Hardy aveva quasi rinunciato a trovare una formula esatta che producesse la loro sequenza. I matematici pensavano che, al massimo, vi potesse essere una formula in grado di produrre una stima che non si discostasse molto dall'effettivo numero di partizioni di  $N$ , in modo del tutto simile a quello in cui la formula di Gauss per i numeri primi forniva una buona approssimazione del numero di numeri primi non maggiori di  $N$ . Ma a Ramanujan non era mai stato insegnato a temere quel genere di sequenze. Era deciso a trovare una formula che gli dicesse che esistevano esattamente cinque modi di dividere quattro pietre in pile distinte, o che ce n'erano 3.972.999.029.388 di dividere 200 pietre in pile distinte.

Laddove aveva fallito con i numeri primi, Ramanujan ottenne un successo spettacolare con le partizioni. Fu la combinazione della capacità di venire a capo di dimostrazioni complesse e della cieca fiducia di Ramanujan nell'esistenza di una formula esatta a condurli alla scoperta. Littlewood non capi mai «perché Ramanujan era così sicuro che ne esistesse una». E quando si osserva la formula — in cui compaiono la radice quadrata di 2,  $\pi$ , differenziali, funzioni trigonometriche, numeri immaginari — non si può fare a meno di domandarsi come sia stata concepita:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \leq k \leq N} \sqrt{k} \left( \sum_{b \bmod k} \omega_{b,k} e^{-2\pi i \frac{bn}{k}} \right) \frac{d}{dn} \left( \frac{\cosh \left( \frac{\pi \sqrt{n - \frac{1}{24}}}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

In seguito Littlewood osservò: «Dobbiamo il teorema a una collaborazione eccezionalmente felice fra due uomini dotati di talenti assai dissimili, alla quale ciascuno diede il contributo migliore, più caratteristico e fortunato che possedeva». Nella vicenda del calcolo delle partizioni c'è un dettaglio curioso. La complicata formula di Hardy e Ramanujan non fornisce il numero esatto di partizioni; produce invece una risposta che è corretta se la si approssima al numero intero più vicino. Così, per esempio, quando nella formula si inserisce il numero 200, si ottiene un valore non intero approssimato a 3.972.999.029.388. Perciò, benché la formula permetta di ottenere la risposta cercata, il fatto che non colga l'essenza dei numeri di partizioni di Noggetti lascia insoddisfatti. (In seguito sarebbe stata scoperta una variante della formula che da la risposta rigorosamente esatta.)

Anche se Ramanujan non riuscì a portare a buon fine lo stesso stratagemma nel caso dei numeri primi, il lavoro che compì insieme a Hardy sulla funzione di partizione ebbe un impatto importante sulla congettura di Goldbach, uno dei grandi problemi irrisolti della teoria dei numeri primi. La maggior parte dei matematici aveva rinunciato persino a tentare di risolvere questo problema. Né era mai stata proposta una sola idea da cui partire per provare a fare qualche progresso concreto nella risoluzione. Soltanto qualche anno prima, Landau aveva dichiarato che il problema era semplicemente inattaccabile.

Il lavoro compiuto da Hardy e Ramanujan sulla funzione di partizione inaugurò una tecnica che oggi è chiamata metodo del cerchio di Hardy e Littlewood. Il riferimento al cerchio nel nome del metodo trae origine dai piccoli diagrammi che accompagnavano i calcoli di Hardy e Ramanujan e che rappresentavano cerchi nella mappa dei numeri immaginati attorno ai quali i due matematici cercavano di eseguire delle integrazioni. Il motivo per il quale al metodo viene associato il nome di Littlewood e non quello di Ramanujan è l'uso che Littlewood e Hardy ne fecero per dare il primo contributo sostanziale a una dimostrazione della congettura di Goldbach. Pur non essendo in grado di provare che ogni numero pari poteva essere espresso come somma di due numeri primi, nel 1923 Hardy e Littlewood riuscirono a dimostrare una cosa che per i matematici era quasi altrettanto importante, ovvero che tutti i numeri dispari maggiori di un certo numero fissato (un numero enorme) potevano essere scritti come somma di tre numeri primi. Ma c'era una condizione che erano obbligati a porre perché la loro dimostrazione risultasse valida: che l'ipotesi di Riemann fosse vera. Questo era dunque ancora un altro risultato subordinato al fatto che l'ipotesi di Riemann diventasse prima o poi il teorema di Riemann. ...”

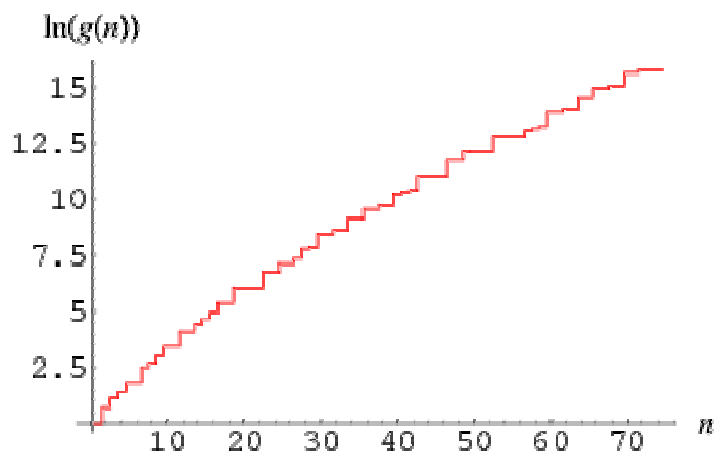
(il suddetto brano è tratto a sua volta dal libro di Marcus du Sautoy “L'enigma dei numeri primi”, Rizzoli )

### Nota 3

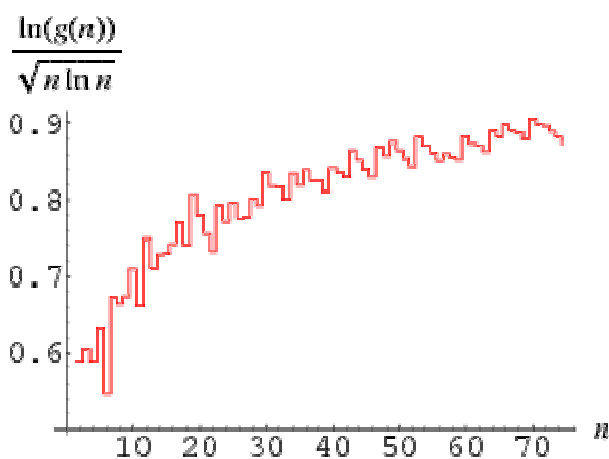
VOCE “*Landau's Function*” da Wolfram MathWorld:

(con grafico simile alla funzione scalino J(x) )

# Landau's Function



Landau's function  $g(n)$  is the maximum order of an element in the [symmetric group](#)  $S_n$ . The value  $g(n)$  is given by the largest [least common multiple](#) of all [partitions](#) of the numbers 1 to  $n$ . The first few values for  $n = 1, 2, \dots$  are 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 15, 20, 30, ... (Sloane's [A000793](#)), and have been computed up to  $n = 500\,000$  by Grantham (1995).



Landau showed that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln [g(n)]}{\sqrt{n \ln n}} = 1.$$





in natura quasi quanto i numeri di Fibonacci , anche al numero aureo  $\Phi$  e a  $\pi$ , anche questo frequente nelle formule riguardanti alcune leggi naturali (per esempio sulla gravità, in alcune costanti, ecc.)

Inoltre, in tale lavoro abbiamo connesso alcuni settori della teoria dei numeri ( numeri di Fibonacci, di Lie, e partizioni) con: funzione zeta di Riemann, ipotesi di Riemann (tramite la funzione di Landau come ipotesi RH equivalente), teoria di stringa e fenomeni naturali di tipo frattale; inoltre abbiamo trovato una buona formula logaritmica per una stima abbastanza attendibile della quantità di numeri  $g(n)$  relativi alla funzione di Landau ( $g(n) \approx \ln(n) * 2,40$ , numeri uguali al più alto minimo comune multiplo di una qualunque partizione del numero  $n$ ).

## Riferimenti

### 1) “Connessioni tra partizioni di numeri $p(n)$ e funzione di

Landau come ipotesi RH equivalente” *Michele Nardelli, Francesco Di Noto*

### 2) “Sulle spalle dei Giganti”, **Sulle spalle dei giganti**”

dedicato a Georg Friedrich Bernhard Riemann

ing. Rosario Turco<sup>1</sup>, prof. Maria Colonnese, dott. Michele Nardelli, prof.

Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello, in

sezione “Articoli sulla Teoria dei numeri” del sito

[www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com)

3) “IPOTESI SULLA VERITA’ DELLE CONGETTURE SUI NUMERI PRIMI CON GRAFICI COMET E CONTRO ESEMPI NULLI (Legendre, Goldbach, Riemann...)” Michele Nardelli, Francesco Di Noto, su questo sito <http://nardelli.xoom.it/virgiliowizard/>

4) **"On some applications of the Eisenstein series in String Theory. Mathematical connections with some sectors of Number Theory and with  $\Phi$  and  $\pi$ "**

5) **“CONGETTURE SUI NUMERI PRIMI ANCORA APERTE (Le nostre soluzioni e le loro possibili**

**e utili conseguenze: RSA, RH), Gruppo Eratostene** in sezione “Articoli su Goldbach” del sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com): Un breve stralcio:

“La *sesta questione* riguarda i numeri di Landau, di forma  $L(n) = n^2 + 1$ , e da noi recentemente risolta positivamente ( i numeri di Landau, seppure molto rari, sono infiniti.

6) **“The Landau’ s prime numbers and the Legendre s conjecture”**

eng. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese, Dr. Michele Nardelli, prof.

Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello

in sezione “Articoli sui numeri primi” (idem)

7) Sito con i lavori (su vari argomenti matematici) di Cristiano Armellini :

<http://armellini.pbworks.com/w/page/36456318/Algoritmi-per-la-fattorizzazione-degli-interi>

<http://armellini.pbworks.com/w/page/36456319/Il-calcolo-del-Pi-greco>

<http://armellini.pbworks.com/w/page/36456321/Generare-i-numeri-primi>

<http://armellini.pbworks.com/w/page/36456333/Stranezze-matematiche>