Teorema delle progressioni di numeri primi consecutivi con distanza sei costante

A cura del Gruppo Eratostene - http://www.gruppoeratostene.com/)

Con la collaborazione di Eugenio Amitrano
(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell'articolo:

	Titolo	**Pag.**
➢	Enunciato	2
➢	Richiami	2
➢	Dimostrazione	3
➢	Considerazioni importanti	5
➢	Generalizzazione del teorema	6
➢	Conclusioni	6
➢	Riferimenti	7

↔

Enunciato

Consideriamo le seguenti due progressioni con distanza sei:

1) $\{a_n\}_{n\in N} = 6n-1$ $\quad \{a_n\} = 5, \ 11, \ 17, \ 23, \ 29, \ 35, \ 41, \ 47, \ 53, \ 59, \ \ldots$
2) $\{b_n\}_{n\in N} = 6n+1$ $\quad \{b_n\} = 7, \ 13, \ 19, \ 25, \ 31, \ 37, \ 43, \ 49, \ 55, \ 61, \ \ldots$

Le progressioni estratte da $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri primi consecutivi, non possono superare il numero di quattro termini, ad eccezione della prima progressione estratta di $\{a_n\}$ formata dai primi consecutivi $5, \ 11, \ 17, \ 23, \ 29$ costituita da cinque termini.

Richiami

Tutti i numeri primi, tranne il 2 e il 3, ma anche i semiprimi senza fattori 2 e 3, sono di forma $6n \pm 1$. Tali numeri sono chiamati numeri **sexy** e deriva dal latino *sex* (sei).

Costruendo le due colonne di numeri di ciascuna forma, otteniamo la seguente Tabella:

n	6n-1	6n+1	Note
1	5	7	Gemelli
2	11	13	Gemelli
3	17	19	Gemelli
4	23	25 = 5×5	Primo + semiprimo
5	29	31	Gemelli
6	35 = 5×7	37	Primo + semiprimo
7	41	43	Gemelli
8	47	49 = 7×7	Primo + semiprimo
9	53	55 = 5×11	Primo + semiprimo
10	59	61	Gemelli
11	65 = 5×13	67	Primo + semiprimo
12	71	73	Gemelli
13	77 = 7×11	79	Primo + semiprimo
14	83	85 = 5×17	Primo + semiprimo
15	89	91 = 7×13	Primo + semiprimo
16	95 = 5×19	97	Primo + semiprimo
17	101	103	Gemelli
18	107	109	Gemelli
19	113	115 = 5×23	Primo + semiprimo
20	119 = 7×17	121 = 11×11	Entrambi semiprimi
21	125 = 5×5×5	127	Primo + semiprimo
22	131	133 = 7×19	Primo + semiprimo
23	137	139	Gemelli
24	143 = 11×13	145 = 5×29	Primo + semiprimo
25	149	151	Gemelli

Tab.1 – Coppie di numeri nella forma $6n \pm 1$

Le infinite coppie $6n-1$ e $6n+1$ sono le infinite coppie di Chen Jingrun le quali possono essere divise in 3 categorie:

1) Coppie formate da due numeri primi (primi gemelli);
2) Coppie formate da un primo e un semiprimo;
3) Coppie formate da due semiprimi;

Nel 1966, Chen dimostrò che ogni N pari, sufficientemente grande, è la somma di due numeri primi oppure è la somma di un numero primo e di un semiprimo formato dal prodotto di due primi.

Nella sua dimostrazione, Chen non specifica quale sia il valore minimo di N.

Nella nostra tabella (***Tab. 1***) basata sulle forme $6n\pm1$ il primo numero N somma di due numeri primi entrambi maggiori di 2 e 3 è il 12 costituito dalla somma dei numeri primi 5 e 7 ($5+7=12$), mentre il numero N minimo che sia somma di un primo e di un semiprimo è il 48 costituito dalla somma di 23 (primo) e 25 (semiprimo), infatti, tutti gli altri N precedenti (18, 24, 36) sono somme di due numeri primi gemelli.

Una curiosità è che tutti gli N ricavati dalla tabella (***Tab. 1***) sono multipli di 12 e ciò è dovuto dalla forma generale della somma: $6n+1+6n-1=12n$.

Dimostrazione

Come si nota dalla tabella (***Tab. 1***), i semiprimi si distribuiscono in eguale misura in entrambe le colonne, interrompendo qualsiasi successione di numeri primi. Tenendo conto che i numeri della stessa colonna differiscono di 6 unità dal precedente e dal successivo vogliamo qui dimostrare che la massima sequenza di numeri primi con differenza costante tra di loro è sempre formata da quattro numeri primi, tranne la sola sequenza iniziale $5,\quad 11,\quad 17,\quad 23,\quad 29$.

Il numero 5 è il capofila della progressione $\{a_n\}_{n\in N}=6n-1$, e nel nostro caso è proprio il numero 5 a dimostrare la nostra tesi oltre a giustificare la prima progressione costituita da cinque termini.

Infatti, nelle due colonne della tabella (***Tab. 1***) si presentano numeri semiprimi multipli di cinque, proprio ogni cinque righe.

Ad ogni n è associato un numero nella forma $6n-1$ e un secondo numero nella forma $6n+1$. Ogni cinque righe, il numero n è multiplo di 5. ($5,\quad 10,\quad 15,\quad 20,\quad 25,\quad ...$), quindi in questi casi possiamo scrivere $n=5k\quad \forall k\in N$.

Per ognuno di questi n multiplo di 5 consideriamo due numeri $p, q \in N$ tali che:

1) $p = n - 1$
2) $q = n + 1$

Per qui avremo la seguente associazione:

k	**n**	**p**	**q**
1	5	4	6
2	10	9	11
3	15	14	16
4	20	19	21
5	25	24	26
…	…	…	…

Possiamo verificare con una semplice dimostrazione che quando n è un multiplo di 5 lo sono anche i numeri $6p+1$ e $6q-1$.

$$1)\ 6p+1 \quad \begin{cases} n = 5k \\ p = n - 1 = 5k - 1 \\ 6p + 1 = 6 \cdot (5k - 1) + 1 = 30k - 6 + 1 = 30k - 5 = \underbrace{5 \cdot (6k - 1)}_{multiplo\ \ di\ \ 5} \end{cases}$$

$$2)\ 6q-1 \quad \begin{cases} n = 5k \\ q = n + 1 = 5k + 1 \\ 6q - 1 = 6 \cdot (5k + 1) - 1 = 30k + 6 - 1 = 30k + 5 = \underbrace{5 \cdot (6k + 1)}_{multiplo\ \ di\ \ 5} \end{cases}$$

Con questa semplice dimostrazione abbiamo verificato che per ogni $n = 5k$ (multiplo di 5, nella colonna $6n+1$ della riga precedente e nella colonna $6n-1$ della riga successiva, compaiono sempre semiprimi multipli di 5.

Poiché n è multiplo di 5 ogni cinque righe, è evidente che anche nelle colonne $6n-1$ e $6n+1$ ci sarà un multiplo di 5 ogni cinque righe. In definitiva le quattro righe rimanenti possono ospitare al più 4 numeri primi.

Come abbiamo già visto, il numero 5 è il capofila della progressione $\{a_n\}_{n \in N} = 6n - 1$, ed è l'unico multiplo di 5 ad essere anche un numero primo, per cui la progressione $5,\ \ 11,\ \ 17,\ \ 23,\ \ 29$ può essere l'unica ad essere costituita da cinque termini.

Considerazioni importanti

Oltre alla prima eccezionale progressione di cinque numeri primi sopra accennata, ci sono i gruppi 41, 47, 53 e 59 nella prima colonna, e 61, 67, 73 e 79 nella seconda colonna; e così via per i gruppi successivi. Sebbene le progressioni di quattro termini siano sempre più rare al crescere di n, perché frammentate dai semiprimi multipli di 7, di 11 e così via, potrebbero essere molto importanti in una futura possibile dimostrazione della congettura delle infinite coppie di numeri primi gemelli;

Se le coppie di numeri primi gemelli fossero di numero finito, dopo l'ultima coppia di gemelli dovrebbe verificarsi una delle due condizioni:

1) Tutti i primi successivi si disporrebbero tutti sulla prima colonna, e quindi diverrebbero tutti di forma $6n-1$;

2) Viceversa, tutti nella seconda colonna, e quindi tutti di forma $6n+1$;

3) Un primo e un semiprimo nella stessa riga;

Dopo tale ipotesi di ultima coppia di gemelli, diciamo in posizione k, i semiprimi si alternerebbero perfettamente tra prima e seconda colonna, come segue:

n	**6n-1**	**6n+1**
k	Gemelli	
k+1	Primo	Semiprimo
k+2	Semiprimo	Primo
k+3	Primo	Semiprimo
k+4	Semiprimo	Primo
…	…	…

In questo modo diventa impossibile, per lo stesso n, la formazione di una nuova coppia di gemelli oltre la presunta ultima coppia. Ma questo ragionamento per assurdo rende impossibile la soluzione negativa della congettura delle infinite coppie di numeri primi gemelli.

Poiché le forme $6n \pm 1$ sembrano dividere gli infiniti numeri primi e i loro prodotti (semiprimi) per entrambe le colonne in parti pressoché uguali, comunque infiniti nella prima colonna e infiniti nella seconda colonna;

Se così fosse, sarebbe negata l'ipotesi di infiniti numeri primi gemelli.

In realtà, esiste una rigorosa regolarità che nega l'equipartizione:

Tutti i prodotti tra numeri primi appartenenti alla stessa colonna ricadono nella seconda colonna, mentre tutti i prodotti di numeri primi appartenenti a colonne diverse ricadono nella prima colonna.

Ad esempio 55 e 77:

- $55 = 6 \times 9 + 1$ presente nella seconda colonna e $55 = 5 \times 11$, con 5 e 11 presenti nella prima colonna;

- $77 = 6 \times 13 - 1$ presente nella prima colonna e $77 = 7 \times 11$ con 7 e 11 presenti in entrambe le colonne;

Se venisse dimostrata, tale regolarità cozzerebbe gravemente contro il ragionamento per assurdo sul numero finito di primi gemelli e sarebbe quindi maggiormente "garantita" l'infinità per n tendente all'infinito.

Generalizzazione del teorema

Ritornando ai gruppi di numeri primi successivi con distanza 6 tra un numero del gruppo e il successivo, utilizzando una dimostrazione analoga, si può generalizzare facilmente il teorema nel seguente modo:

Per ogni $p + n$ numeri c'è sempre un multiplo di p, a partire da p nella sua colonna e dal primo multiplo di p nell'altra colonna. Questa relazione può essere usata come crivello limitato alle due sole colonne; tutto ciò che rimane alla fine sono tutti i numeri primi ad eccezione del 2 e del 3. Inoltre, nelle due colonne non figurano semiprimi multipli di 2 o di 3.

Conclusioni

Vorremmo concludere quest'articolo, elencando di seguito alcuni lavori importanti sulle progressioni di primi che in qualche modo, il nostro articolo potrebbe trovare dei legami:

- Teorema di Green-Tao (Ben Green e Terence Tao[*1]), un'estensione del Teorema di Szemeré di sulle progressioni lunghe di primi.

- Teorema di Goldston, Yildirim e Pintz sugli intervalli brevi più densi di numeri primi consecutivi, rispetto agli intervalli vicini di uguale lunghezza ma meno densi.

[*1] *Terence Tao è un giovane matematico australiano, encomiato nel 2006 con la medaglia Fields al Congresso Mondiale di Matematica di Madrid.*

Questi teoremi, le considerazioni sulle forme $6n \pm 1$; possono in qualche modo confermare ulteriormente le nostre proposte di dimostrazione delle congetture di Goldbach e delle infinite coppie di numeri gemelli (***Rif. 1***, ***Rif. 2*** e ***Rif. 3***), magari utilizzando le forme $6n \pm 1$ come filo rosso che lega questo lavoro, le PAP, e i teoremi sopra indicati.

Inoltre, quest'articolo potrebbe essere utile per comprendere meglio la distribuzione dei numeri primi. Di conseguenza, magari alla lunga, un passo in avanti sull'ipotesi di Riemann, che oggi è uno dei principali temi di ricerca matematica. (***Rif. 2***)

Riferimenti

1) Sezione n.1: "***Articoli su Goldbach***" – Pagina Articoli del Gruppo Eratostene;

2) Sezione n.2: "***Articoli su Riemann***" – Idem.

3) Sezione n.6: "***Articoli sui Numeri Primi***" – Idem;