Connessione tra Repunit, numeri di Mersenne e Congettura di Collatz

A cura di

Francesco Di Noto
(http://www.gruppoeratostene.com/)

Eugenio Amitrano
(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell'articolo:

↔

- **Introduzione**

In fisica, attraverso l'osservazione sperimentale e successivamente attraverso lo studio dei numeri che tale osservazione ha prodotto, vengono costruite formule matematiche che regolano l'andamento di questi numeri. Molto spesso capita che formulazioni riguardanti fenomeni e grandezze fisiche differenti, presentino delle curiose e stupefacenti analogie che a prima vista non si riescono a cogliere.

I numeri sono in qualche modo tutti connessi tra di loro, basti pensare che un'operazione numerica è una procedura in cui, a partire da uno o più numeri, viene generato un'altro numero. Ad esempio, se ci venisse chiesto cosa hanno in comune i numeri 30, 42, 66 e 78, che a prima vista non ci dicono nulla, dopo una scomposizione in fattori primi scopriamo che hanno in comune tre fattori su quattro:

$$30 = 1 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$42 = 1 \times 2 \times 3 \times 7$$
$$66 = 1 \times 2 \times 3 \times 11$$
$$78 = 1 \times 2 \times 3 \times 13$$

A tal proposito, è famoso l'aforisma del matematico polacco Stefan Banach che cita una bellissima frase sulle analogie in matematica:

"I buoni matematici riescono a vedere le analogie. I grandi matematici riescono a vedere le analogie tra le analogie".

Nel presente articolo viene illustrata una connessione numerica che interessa prevalentemente i numeri Repunit (*REPeated UNIT*) che sono numeri interi, in base decimale, costituiti esclusivamente dalla cifra 1, ad esempio 1, 11, 111, 1111 e così via. Inoltre, all'interno dell'articolo sono riportati anche elementi teorici propedeutici per tale connessione.

Buona lettura!

- **Base numerica**

Le quantità possono essere espresse attraverso un sistema di numerazione, ed ogni sistema di numerazione è dotato di una base la quale ne identifica il numero dei simboli utilizzati per esprimere tali quantità.

Ad esempio il sistema di numerazione con cui abbiamo più confidenza è il sistema decimale cioè in base 10, e 10 corrisponde al numero di simboli utilizzati, che sono appunto i numeri compresi tra 0 e 9.

Quindi, un numero n in base b, viene espresso con cifre $c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ scelte opportunamente tra 0 a $b-1$.

Nella rappresentazione di un numero, se si vuole indicare la base, si scrive:

$$\boxed{(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_b} \qquad (1.1)$$

La corrispondenza che esiste tra base scelta e base decimale è la seguente:

$$\boxed{(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0)_b = (c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \ldots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0)_{10}} \quad (1.2)$$

Ad esempio:

$$n = (1234)_{10}$$
$$c_3 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_1 = 3 \quad c_0 = 4$$
$$n = (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)_{10} = (1234)_{10}$$

$$n = (6204)_8$$
$$c_3 = 6 \quad c_2 = 2 \quad c_1 = 0 \quad c_0 = 4$$
$$n = (6 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0)_{10} = (3204)_{10}$$

$$n = (1111)_4$$
$$c_3 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_1 = 1 \quad c_0 = 1$$
$$n = (1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0)_{10} = (85)_{10}$$

$$n = (1101)_2$$
$$c_3 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_1 = 0 \quad c_0 = 1$$
$$n = (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{10} = (13)_{10}$$

- **Numeri riconducibili a Repunit**

Matematicamente, i numeri repunit sono esprimibili nella seguente forma:

$$\boxed{R_n = \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)_{10} \qquad \forall n \in N} \quad (1.3)$$

In questa forma, n rappresenta il numero delle unità ripetute. Infatti:

$$R_1 = \left(\frac{10^1 - 1}{9}\right) = \frac{9}{9} = 1$$
$$R_2 = \left(\frac{10^2 - 1}{9}\right) = \frac{99}{9} = 11$$
$$R_3 = \left(\frac{10^3 - 1}{9}\right) = \frac{999}{9} = 111$$
$$\ldots$$

Per numeri riconducibili a repunit invece si intendono quei numeri con base diversa da 10 nella seguente forma:

$$\boxed{R_{b,n} = \left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right)_{10} = \left(\underbrace{111...1}_{n \quad unità}\right)_b \qquad \forall n \in N} \quad (1.4)$$

Questi numeri espressi in base b risulteranno costituiti esclusivamente dalla cifra 1 ed anche in questo caso n rappresenta il numero delle unità ripetute.

Di seguito gli esempi per $b = 3$ e $b = 5$:

- Base $\boxed{b = 3}$

$$R_{3,1} = \left(\frac{3^1 - 1}{2}\right)_{10} = \left(\frac{2}{2}\right)_{10} = (1)_{10} = \left(1 \cdot 3^0\right)_{10} = (1)_3$$
$$R_{3,2} = \left(\frac{3^2 - 1}{2}\right)_{10} = \left(\frac{8}{2}\right)_{10} = (4)_{10} = (3+1)_{10} = \left(1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0\right)_{10} = (11)_3$$
$$R_{3,3} = \left(\frac{3^3 - 1}{2}\right)_{10} = \left(\frac{26}{2}\right)_{10} = (13)_{10} = (9+3+1)_{10} = \left(1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0\right)_{10} = (111)_3$$
$$\ldots$$

- Base $\boxed{b=5}$

$$R_{5,1}=\left(\frac{5^1-1}{4}\right)_{10}=\left(\frac{4}{4}\right)_{10}=(1)_{10}=(1\cdot 5^0)_{10}=(1)_5$$

$$R_{5,2}=\left(\frac{5^2-1}{4}\right)_{10}=\left(\frac{24}{4}\right)_{10}=(6)_{10}=(5+1)_{10}=(1\cdot 5^1+1\cdot 5^0)_{10}=(11)_5$$

$$R_{5,1}=\left(\frac{5^3-1}{4}\right)_{10}=\left(\frac{124}{4}\right)_{10}=(31)_{10}=(25+5+1)_{10}=(1\cdot 5^2+1\cdot 5^1+1\cdot 5^0)_{10}=(111)_5$$

...

La validità della (1.4) si può facilmente dimostrare applicando la seguente regola di scomposizione algebrica:

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)} \quad (1.5)$$

Dimostrazione

Hp: $R_{b,n}=\left(\dfrac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}$ Th: $R_{b,n}=\left(\underbrace{111...1}_{n\ \ cifre}\right)_b$

Partiamo dall'ipotesi: $$R_{b,n}=\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}$$

Applicando la (1.5) segue: $$\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}=\left[\frac{(b-1)\cdot\left(b^{n-1}+b^{n-2}+...+b+1\right)}{b-1}\right]_{10}$$

Semplificando $b-1$ otteniamo: $$\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}=\left(b^{n-1}+b^{n-2}+...+b+1\right)_{10}$$

Che possiamo scriverlo nella forma: $$\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}=\left(1\cdot b^{n-1}+1\cdot b^{n-2}+...+1\cdot b^1+1\cdot b^0\right)_{10}$$

Che per la (1.2) corrisponde a: $$\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)_{10}=\left(\underbrace{111...1}_{n\ \ cifre}\right)_b$$

Infine, per proprietà transitiva: $$R_{b,n}=\left(\underbrace{111...1}_{n\ \ cifre}\right)_b$$

C.V.D.

- ## **Connessioni con i numeri di Mersenne e Congettura di Collatz**

I numeri di Mersenne prendono il nome del matematico francese Marin Mersenne e sono i numeri della forma:

$$\boxed{M_n = \left(2^n - 1\right)_{10}} \qquad (2.1)$$

Questi numeri sono famosi nella Teoria dei Numeri Primi per una particolare proprietà che li caratterizza, e cioè "*se M_n è un numero primo allora anche n è un numero primo*". Questa proprietà è univoca, in quanto se n è un numero primo non necessariamente risulta M_n primo.

Invece, la Congettura di Collatz, conosciuta anche come congettura $3n+1$, è una famosa congettura della Teoria dei Numeri per l'elevato numero di matematici che hanno tentato di dimostrarla. Il matematico ungherese *Paul Erdõs* mise in palio un premio di 500 dollari di tasca propria per chi fosse riuscito a dimostrarla e si racconta che riferendosi alla congettura disse: "*La matematica non è ancora pronta per problemi di questo tipo*".

Partendo da un qualsiasi numero intero positivo è possibile generare una sequenza così composta: ogni termine della sequenza corrisponde alla metà del termine precedente se quest'ultimo è un numero pari, altrimenti, se è dispari, il termine successivo corrisponde al triplo del precedente sommato ad uno. Ad esempio il termine successivo al numero 22 è 11, in quanto 22 è un numero pari e $11 = 22/2$, mentre il termine successivo ad 11 è 34, in quanto 11 è un numero dispari e $34 = 3 \times 11 + 1$.

La congettura di Collatz afferma che in ogni caso, cioè a partire da qualsiasi numero intero positivo, prima o poi la sequenza incontra sempre il numero 1.

Di seguito le sequenze generate dai primi 10 numeri interi positivi:

1) 1
2) 2 1
3) 3 10 5 16 8 4 2 1
4) 4 2 1
5) 5 16 8 4 2 1
6) 6 3 10 5 16 8 4 2 1
7) 7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1
8) 8 4 2 1
9) 9 28 14 7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1
10) 10 5 16 8 4 2 1

Nel web e su diverse riviste sono state pubblicate svariate proposte di dimostrazione della congettura di cui nel paragrafo dei riferimenti ne riportiamo alcuni.

A questo punto possiamo introdurre i numeri di Collatz.

I numeri di Collatz sono i numeri della forma:

$$\boxed{C_n = \left(\frac{4^n - 1}{3}\right)_{10}} \qquad (2.2)$$

La particolarità di questi numeri (dispari) risiede nel fatto che nella sequenza generata, il numero successivo ad un numero di Collatz corrisponde ad una potenza di 2, e le potenze di due nella sequenza, per la loro natura, collassano inevitabilmente al numero 1.

$$\boxed{3C_n + 1 = 2^m} \quad (2.3)$$

Se analizziamo bene vediamo che sia i numeri di Mersenne che i numeri di Collatz sono riconducibili a Repunit. Infatti, la (2.1) –*Mersenne*– e la (2.2) –*Collatz*– corrispondono alla (1.4) rispettivamente con $b = 2$ e $b = 4$.

- Mersenne, base $\boxed{b = 2}$

$$M_1 = R_{2,1} = \left(\frac{2^1 - 1}{1}\right)_{10} = (1)_{10} = (1 \cdot 2^0)_{10} = (1)_2$$

$$M_2 = R_{2,2} = \left(\frac{2^2 - 1}{1}\right)_{10} = (3)_{10} = (2 + 1)_{10} = (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{10} = (11)_2$$

$$M_3 = R_{2,3} = \left(\frac{2^3 - 1}{1}\right)_{10} = (7)_{10} = (4 + 2 + 1)_{10} = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{10} = (111)_2$$

$\ldots$

- Collatz, base $\boxed{b = 4}$

$$C_1 = R_{4,1} = \left(\frac{4^1 - 1}{3}\right)_{10} = (1)_{10} = (1 \cdot 4^0)_{10} = (1)_4$$

$$C_2 = R_{4,2} = \left(\frac{4^2 - 1}{3}\right)_{10} = (5)_{10} = (4 + 1)_{10} = (1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0)_{10} = (11)_4$$

$$C_3 = R_{4,3} = \left(\frac{4^3 - 1}{3}\right)_{10} = (21)_{10} = (16 + 4 + 1)_{10} = (1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0)_{10} = (111)_4$$

$\ldots$

Concludiamo questo nostro articolo, riportando di seguito una tabella che riporta i primi dieci valori di Mersenne e Collatz, sia in base decimale che nella base b relativa.

n	$(M_n)_{10}$	$(M_n)_2$	$(C_n)_{10}$	$(C_n)_4$
1	1	1	1	1
2	3	11	5	11
3	7	111	21	111
4	15	1111	85	1111
5	31	11111	341	11111
6	34	111111	1.365	111111
7	127	1111111	5.461	1111111
8	255	11111111	21.845	11111111
9	511	111111111	87.381	111111111
10	1.023	1111111111	349.525	1111111111

- ## Riferimenti

1) The Repunit Primes Project
   Giovanni Di Maria
   http://www.repunit.org/

2) Dimostrazione della Congettura di Collatz
   Gruppo Eratostene
   http://www.gruppoeratostene.com/articoli/congettura-collatz-dimostrazione.pdf

3) La Congettura di Collatz
   Cristiano Armellini
   http://armellini.pbworks.com/f/La%20congettura%20di%20Collatz.pdf

4) Connessioni tra numeri primi Repunit e numeri di Smith
   Gruppo Eratostene
   http://www.gruppoeratostene.com/articoli/Connessioni%20tra%20Repunit%20e%20numeri%20di%20Smith.pdf

5) Connessioni tra i numeri primi di Fermat, Mersenne e numeri di Collatz
   Francesco Di Noto
   http://www.gruppoeratostene.com/articoli/mersenne-fermat-collatz.pdf