Ricorsività (o ricorrenza) nelle somme di numeri particolari successivi (caso generale a, b)

casi particolari a=b=1 (numeri di Fibonacci, F, e a=b=2 (le dimensioni coinvolte nelle teorie di stringa, 2F)

Francesco Di Noto, Michele Nardelli

Abstract

In this paper we will talk about recurrence (or recursion) of Fibonacci' numbers (based on couple 1,1) and similar numeric series (based on numeric infinite couples a,b)

Riassunto

In questo lavoro mostriamo come la serie di Fibonacci discende da un concetto matematico detto ricorsività (o ricorrenza), in base al quale dati due numeri a e b (anche uguali), se si somma a+b si ottiene un terzo numero c, se si somma b+c si ottiene un quarto numero, d, e cosi via all'infinito: si osserva che prima o poi il rapporto n/(n-1) di tale serie numerica si avvicina a Φ = 1,618: il ben noto rapporto aureo. Vedremo che la coppia di numeri 1,1

da luogo alla serie di Fibonacci, e che qualsiasi coppia di numeri uguali (e di Fibonacci insieme) da luogo ad una serie di numeri multipli dei numeri di Fibonacci , mentre se non sono numeri di Fibonacci, danno numeri più o meno vicini ai numeri di Fibonacci.

La natura preferisce notoriamente i numeri di Fibonacci F, basati sulla coppia 1,1 (Rif. 1); o (che si sappia), al massimo (dimensioni coinvolte nelle teorie di stringa), la coppia 2,2, che da luogo a numeri doppi dei numeri di Fibonacci, e quindi 2F (Rif. 2)

°°°°°°°°°°°°°°°°°

Nel suo recente libro " Il meraviglioso mondo dei numeri"(Einaudi), Alex Bellos scrive a pag. 365 :

"…Proseguiamo ora il ragionamento e consideriamo una sequenza alla Fibonacci iniziando con due numeri a caso e sommando i termini consecutivi per andare avanti. Cominciando, per dire, con 4 e 10, il termine seguente sarà 24.Il nostro esempio ci dà:

4, 10, 14, 24, 38. 62, 100, 162, 262, 424 …

Osserviamo i rapporti tra termini consecutivi:

$$\frac{10}{4^*},\ \frac{14}{10},\ \frac{24}{14},\ \frac{38}{24},\ \frac{62}{38},\ \frac{100}{62},\ \frac{162}{100},\ \frac{262}{162},\ \frac{424}{262}\ ..$$

(*nel libro è indicato erroneamente 14, N.d.A.A.)

ossia:

2,5; 1,4; 1,714; 1,583; 1,632; 1,612; 1,620; 1,617; 1,618…

L'algoritmo di ricorrenza di Fibonacci in cui si sommano i due termini consecutivi di una sequenza per ottenere il successivo è così potente che *quali che siano* i due numeri di partenza, il rapporto tra termini consecutivi converge sempre a phi, Io lo trovo un fenomeno matematico quanto mai avvincente…"

(notiamo che tale convergenza è più veloce se i due numeri iniziali a e b sono vicini a due numeri di Fibonacci, come nel caso suddetti 4 e 10, vicini a 5 e a 8 ; **nel caso di maggiore differenza, la convergenza a phi è più lenta, ma alla fine si raggiunge ugualmente**).

Novità da noi scoperta: notiamo che i numeri della serie differiscono di poche unità dalla serie di Fibonacci originale come, da seguente Tabella :

Nuova serie (S)	***Serie di Fibonacci (F)***	Differenza d = S – F d ≈ S/10	*Osservazioni: d crescente e spesso quasi media tra due numeri di Fibonacci*
4	***3***	1	
10	***8***	2	
14	***13***	1	
24	***21***	3	
38	***34***	4	
62	***55***	7	
100	***89***	11	***11≈(13+8)/2=10,5***
162	***144***	18	***18≈(21+13)/2 =17***
262	***233***	29	***29≈(21+34)/2=27,5***
424	***377***	47	***47≈(34+55)/2=44,5***
…	**…**	…	**…**

(L’ultimo rapporto consecutivo è 424/262 = 1,6183206)

Ecco quindi un’altra connessione con Fibonacci, oltre al rapporto aureo 1,618 citato da Bellos. Da qui l’idea base di questo articolo.

Un altro esempio, per a = 10, b =18

S	***F***	d = S - F	Osservazioni Ora il rapporto è $S/d \approx 3{,}8$
10	***8***	2	5
18	***13***	5	3,6
28	***21***	7	4
46	***34***	12	3,83
74	***55***	19	3,89
120	***89***	31	3,87

(L'ultimo rapporto consecutivo è 120/74 = 1,621 ≈ 1,618)

In genere il rapporto r' è il quadrato del rapporto r = b/a, quindi

$$S/d \approx (b/a)^2$$

e a sua volta b/a è circa una potenza di 1,618…quindi

$(b/a) \approx 1{,}618^c$, per es. $10 \approx 1{,}77^4$, con 1,77 ≈ 1,618

nel primo esempio , $3{,}87 \approx 1{,}40^4$ con 1,40 ≈ 1,618

nel secondo esempio; in seguito si potrebbe approfondire meglio

questo aspetto matematico.

Passiamo ora alla serie di Fibonacci, basati sulla coppia 1,1 (cioè

a = b = 1)

1,   **1**

1 +1 = 2

2 + 1 = **3**

3 + 2 = **5**

5 + 3 = **8**

…   …   com'è già ben noto ai matematici

Inoltre, dati due numeri della serie, si possono ottenere i precedenti per sottrazioni successive, così come per i numeri successivi si ottengono per addizioni successive; per es. se 74 e 46 sono due numeri della serie, i precedenti saranno 74-46= 28: 46 – 28 = 18; 28 – 18 = 10, e   18 e 10 sono i numeri a e b iniziali, sui quali si fonda la serie. Ma proseguendo ancora a ritroso, avremo 18 – 10 = **8** , 10 **-** 8 = 2,   8 **-** 2= 6, 6 **-** 2 =4, 4 **-** 2 = **2**, 2 **-** 2 = **0,** cioè si arriva a numeri molto piccoli, che sono numeri di Fibonacci (**8, 2, 0**), o molto vicini (6 = **5** + 1; 4 = **3** + 1): potrebbe essere questa la concausa di questa proprietà di tali serie, possibilmente legata al teorema di Zeckendorf (qualsiasi numero è la somma di tanti numeri di Fibonacci: parzialmente, da omonima voce di Wikipedia:

"... Il teorema di Zeckendorf afferma che ogni intero positivo è rappresentabile in modo unico come la somma di *uno o più* numeri di Fibonacci distinti in maniera tale che la somma non includa due numeri di Fibonacci consecutivi. Una somma che rispetti queste condizioni è detta **rappresentazione di Zeckendorf**.

Per esempio, la rappresentazione di Zeckendorf di 100 è

$$100 = 89 + 8 + 3$$

Ci sono altri modi per rappresentare 100 come somma di numeri di Fibonacci, per esempio

$$100 = 89 + 8 + 2 + 1$$
$$100 = 55 + 34 + 8 + 3$$

ma queste non sono rappresentazioni di Zeckendorf perché 1 e 2 sono numeri di Fibonacci consecutivi, e lo stesso vale per 34 e 55…"

Questo teorema potrebbe essere coinvolto in qualche modo nella ricorsività oggetto di questo lavoro. Ce ne occuperemo eventualmente in futuro.

Vediamo ora la coppia 2, 2 (cioè a = b = 2)

2, **2**

2 + 2 = **4**

4 + 2 = **6**

6 +4 = **10**

10 + 6 = **16**

16 + 10 = **26**

26 + 16 = **42**

… … …

Numeri ovviamente di forma 2F e coinvolti, fino al 26, (e forse anche il 42 = 2*21, più una spaziale) nella teorie di supersimmetria e del supermondo , nelle teorie di stringa , in Rif. 2, del quale riportiamo il riassunto;

"FIBONACCI, DIMENSIONI, STRINGHE: NUOVE INTERESSANTI CONNESSIONI"
Francesco Di Noto e Michele Nardelli…sul sito: eprints.bice.rm.cnr.it/640/1/Nardinot02.pdf

Riassunto

In questo lavoro si mostrano semplici ma interessanti connessioni tra i numeri F di Fibonacci F = 1,2,3,5,8,13 e i numeri D corrispondenti alle dimensioni spazio -temporali coinvolte nelle teorie di stringa, con D = 2F, formula che potrebbe essere la condizione limitante (o una delle condizioni limitanti) circa i modi di vibrazioni delle stringhe, le quali possono vibrare solo con certi numeri D, come 10 e 26 per le stringhe eterotiche, e non con altri. Inoltre potrebbe esistere una connessione tra le simmetrie dei gruppi algebrici di Lie, importanti nel Modello Standard, e i numeri D = 2F.
Se così fosse veramente, l'intero nostro universo visibile poggerebbe, dal punto di vista matematico, quasi interamente sui numeri di Fibonacci, oltre che sui numeri primi, i numeri primi naturali, ed anche sui numeri di partizioni p(n), coinvolti nelle teorie sulla gravitazione ma anche nelle teorie di stringa, e i numeri p-adici, coinvolti nelle teorie di stringa. Ci sarebbe quindi un solido ponte tra la fisica teorica e alcuni settori della teoria dei numeri (numeri di Fibonacci con la formula D =2F, numeri primi sottoforma di numeri primi naturali, di forma 6F + 1, numeri p –adici, e infine i numeri di partizione; tutti numeri con curve logaritmiche, molto diffuse in parecchi fenomeni naturali."

I numeri della serie estesa ottenuti da una coppia di numeri di Fibonacci uguali, e quindi 2F, 3F, 4F, 5F, ecc., hanno una curiosa proprietà, estensione del cosiddetto paradosso di Fibonacci (Rif.3 e Rif. 4) dei quali riportiamo qualche esempio:

a) caso 1,1 (serie iniziale e semplice di Fibonacci)

data la terna di Fibonacci 3,5,8, abbiamo il prodotto dei due elementi esterni 3 e 5 uguale al quadrato dell'elemento centrale - 1 :

$$3*8 = 24 = 5^2 – 1$$

Con la terna successiva 5,8,13, abbiamo invece

$$5*13= 65 = 8^2 +1$$

L'alternanza di + 1 e -1 si ripete all'infinito, per tutte le terne di Fibonacci. In questo caso 1 è il quadrato di 1 della coppia a =1 b=1.

Caso 2,2 con 2F, quindi la serie 2, 4, 6, 10, 16, 26

Per la terna 4, 6, 10 abbiamo ora

$$4*10 = 40 = 6^2 + 4 ,$$

e per la terna successiva 6,10, 16 abbiamo

$$6*16 = 96 = 10^2 – 4$$

Con alternanza di + 4 e - 4 per le infinite terne della serie.

Ora 4 è il quadrato di a = b = 2

Idem per qualsiasi serie nF un solo esempio per a= b = n = 7

Serie nF = 7F, il quadrato della differenza è ora 7^2 =49

1*7 = 7

2*7 = 14

3*7 = 21

5*7 = 35

8*7 = 56

… …

Terna 7, 14, 21 ; 7*21 = 147 = 14^2 = 196 – 49

Terna 14, 21, 35; 14*35 = 490 = 21^2 = 441 + 49

E così via per qualsiasi n di nF

In Rif. 5 consigliamo un ottimo video divulgativo sulla serie di Fibonacci.

Conclusioni

Ecco quindi, come la ricorsività, o ricorrenza, delle somme basate su una coppia di numeri, porti alla nota serie F di Fibonacci con la coppia numerica 1,1 , a,b e alle serie generalizzate di Fibonacci con le coppie numeriche nF , con nF multipli di Fibonacci, e ai relativi "paradossi dei quadrati " ora spiegati.

Ed al coinvolgimento di 2F nelle teorie di stringa.

Nota 1

Ricorsività delle tre serie di numeri: Fibonacci, Lie, partizioni

Connessioni con i numeri quadrati

Dal recente libro di Alex Bellos "Il meraviglioso mondo dei numeri" (Einaudi) riportiamo un brano sulla ricorsività dei numeri di Fibonacci in molti fenomeni naturali: la nostra osservazione è che essendo ricorsivi o parzialmente ricorsivi (ottenibili da somme di numeri precedenti nella stessa serie) anche i numeri di Lie e le partizioni di numeri, ci sembra di notare una certa loro "divisione dei compiti": i numeri di Fibonacci sono i preferiti dai fenomeni vitali (fiori, foglie, conchiglie, conigli, ecc. ecc.) , mentre i numeri di Lie e le partizioni di numeri sono i preferiti dai fenomeni fisici (le simmetrie nel Modello Standard e nelle teorie di stringa, le partizioni nei livelli energetici degli atomi, ecc,), ma tutti e tre i tipi di numeri sembrano preferire la media aritmetica tra due quadrati perfetti, ossia porsi a metà strada tra due quadrati (vedi Tabella successiva, con le loro radici quadrate);

i più "bravi" nel posizionarsi per primi in questi punti sono i numeri di Lie, essendo della forma $L(n) = n^2 + n +1$, cioè a metà strada tra n^2 e $(n+1)^2$, essendo $2n +1$ la distanza tra due quadrati qualsiasi.

Non ne comprendiamo ancora il motivo per cui la natura preferisce questi punti (minore sforzo energetico? O altro?); ma è già qualcosa, per noi, l'aver notato tale preferenza numerica, in perfetto stile pitagorico o anche galileiano (l'universo è basato sui numeri)

" …Una caratteristica importante della sequenza di Fibonacci è che è ***ricorsiva,*** il chè significa che ogni nuovo termine è generato dai valori dei termini precedenti. Ciò contribuisce a spiegare perché i numeri di Fibonacci siano così diffusi nei sistemi naturali. Molte forme di vita crescono mediante un processo di ricorrenza."

Vediamo ora, con una tabella delle tre serie di numeri e le loro radici quadrate (poiché la parte decimale della radice quadrata cresce lentamente da un quadrato al successivo, ed è **0,50** a metà strada, possiamo notarlo nelle radici quadrate, con parte decimale ≈ 0,**50**, e → 0,**50**, dei numeri delle tre serie più vicini tra loro):

Tabella

Fibonacci F(n)	√F(n)	Lie L(n)	√(L(n)	Partizioni p(n)	√p(n)
1	1	1	1	1	1
1	1			1	1
2	1,**41**			2	1,**41**
3	1,73	3	1,73	3	1,73
5	2,23			5	2,23
8	2,82	7	2,**64**	7	2,**64**
13	3,**60**	13	3,**60**	15	3,87
21	4,**58**	21	4,**58**	22	4,69
34	5,83	31	5,**56**	30	5,**47**
55	7,**41**	57	7,**54**	56	7,**48**
89	9,**43**	91	9,**53**	101	10,04
144	12,00			135	11,**61**
233	15,26	241	15,**52**	231	15,19
377	19,**41**	381	19,**51**	385	19,**62**
610	24,69	601	24,**51**	627	25,03
987	31,**41**	993	31,**51**	1002	31,**65**
1597	39,96	1561	39,**50**	1575	39,68
2584	50,83	2551	50,**50**	2436	49,35
…	…	…	…	…	…

Notiamo sette numeri (su diciotto) con radici quadrate in rosso nella serie di Fibonacci fino a 2584 , dodici nei numeri di Lie fino a 2551 e sette nelle partizioni di numeri fino a 2436: I numeri di Lie fanno la parte del leone, essendo di forma $L(n) = n^2 + n + 1$, mentre le altre tre serie sono un po' più distanti da tale formula, poiché:

$F(n) \approx n^2 + n \pm c$ $p(n) \approx n^2 + n \pm c'$, con c e c' numeri piccoli, mediamente dell'ordine di $\sqrt{n}$.

La radice quadrata dei numeri di Fibonacci, ha come parte decimale più frequente ricorsiva 0,**41**, mentre la radice quadrata dei numeri di partizioni ha come parte decimale più regolare e frequente 0,**6l**, 0,**62**, 0,**65** leggermente crescente. Mentre per i numeri di Lie, ovviamente, è 0,**50**, come circa la media aritmetica tra 0,**41** e 0,**62,** che quindi sono quasi simmetrici rispetto a 0,**50** dei numeri di Lie.

Circa la ricorsività di tali numeri (Fibonacci, Lie e partizioni), essa è perfetta per i numeri di Fibonacci (un numero di Fibonacci , com'è noto, è esattamente la somma dei due numeri precedenti), mentre per i numeri di Lie è meno perfetta , specialmente all'inizio, per numeri di Lie più grandi tende ad una maggiore perfezione, per esempio 993 +1561 = 2554, molto prossimo a 2551.

La ricorsività per i numeri di Lie è perfetta invece come 1 + i numeri pari successivi consecutivi; per es.: 31 = 1 +20 + 10 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 , cioè 1 + i primi quattro n numeri pari, essendo n = 4 = √20 +

4.:

Per trovare facilmente un numero di Lie L(n   L(n+1)) a partire dal precedente L(n) , occorre aggiungervi il doppio della parte intera della sua radice quadrata e 2 , cioè $2\sqrt{L(n)} +2$; per esempio per **31**, il prossimo numero di Lie è $31 + 2\sqrt{31} = 31 + 2*5 =31 + 10 +2 =$ **43**; il prossimo numero di Lie sarà $43 + 2\sqrt{43} + 2 = 43 +12 +2 =$ **57**, dove, in generale, **2√L(n)** intero è l'ennesimo numero pari da aggiungere ai precedenti. Infatti 21 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8, il prossimo numero pari per arrivare a 31 è $10 = 2\sqrt{31}$ intero , poiché $\sqrt{31} =$ **5**,56 .

Ma ancora più semplice considerare l'**intero superiore** della radice quadrata, con solo 2√(L(n), in tal modo si elimina il + 2: riepilogando: $L(n+1) = L(n) + 2\sqrt{(ln)}$ int. sup.: per $\sqrt{31}=$ **5,56 ≈ 6** si considera quindi 2*6 = 12, e quindi **31** + 12 = **43** numero di Lie successivo a 31. Questa relazione è nuova, appena scoperta, e quindi inedita, e mostra una ricorsività numericamente rigorosa per i numeri di Lie.

Per le **partizioni** invece, la loro ricorsività anch'essa è meno perfetta rispetto alla serie di Fibonacci; la ricorsività è leggermente migliore se si prendono quattro numeri consecutivi: il quarto è circa la somma del primo e del terzo, anziché del secondo e del terzo come nei numeri di Fibonacci (per i quali bastano tre numeri consecutivi, con il terzo uguale alla somma del primo e del secondo): per esempio, per le prime quaterne:

1°	2°	3°	4°	4° ≈ 1° + 3°				
1	1	2	3	3	≈	1 + 2	=	3
1	2	3	5	5	≈	1 + 3	=	4
2	3	5	7	7	≈	2 + 5	=	7
3	5	7	11	11	≈	3 + 7	=	10
5	7	11	15	15	≈	5 + 11	=	14
7	11	15	22	22	≈	7 + 15	=	22
11	15	22	30	30	≈	11 + 22	=	33
15	22	30	42	42	≈	15 + 30	=	45
…	…	…	…	…		… …		…

Per quaterne più grandi funziona meno bene :

385	490	627	792	792	≈	385 + 627	=	1012
490	627	792	1002	1002	≈	490 + 792	=	1282

Ma il 4° numero è ora più vicino alla somma del 1° e del 2° anziché del 1° e del 3° :

792 ≈ 385 + 490 = 875

1002 ≈ 490 + 627 = 1117

Quindi la ricorsività non è molto perfetta nei numeri di partizione, come pure nei numeri di Lie, a differenza dei numeri di Fibonacci; ma la Natura se ne serve lo stesso per alcuni fenomeni, e forse quindi con minore frequenza rispetto ai numeri di Fibonacci, che invece, come abbiamo visto,   hanno una **ricorsività perfetta** circa la somma dei due numeri precedenti.

Ricorsività , infine, significa anche **frattalità** dei rispettivi fenomeni naturali , comune sia ai numeri di Fibonacci che alle partizioni di numeri , ma anche alle simmetrie dei numeri di Lie , come si è visto nello stato quantistico critico del niobato di cobalto, dove emerge il gruppo di **simmetria** E8.   .

Riferimenti

1) L'EQUAZIONE PREFERITA DELLA NATURA: $n^2 + n + 1$ (con n primo) (alla base de numeri e dei gruppi di Lie, dei numeri di Fibonacci, delle partizioni di numeri, delle simmetrie e delle teorie di stringa)

Francesco Di Noto, Michele Nardelli

Abstract

In this new paper, we show with tables and examples, as the equation of the title is the basis of numbers and Lie groups, partitions and Fibonacci numbers, all three of these types of numbers are present in many phenomena natural. Here we define the above equation as "equation preferred from the nature", based on simple mathematical concepts: prime numbers, the sums of the first n natural numbers, and all possible sums that give n as result, and their roles in the symmetry, in the Fibonacci series, and finally in string theory, related to the symmetries and the golden number of the Fibonacci series (and to a lesser level, to the partitions of numbers)

2) "FIBONACCI, DIMENSIONI, STRINGHE: NUOVE INTERESSANTI CONNESSIONI"

Francesco Di Noto e Michele Nardelli, sul sito

eprints.bice.rm.cnr.it/640/1/Nardinot02.pdf

3) (parte prima) **Generalizzazione della serie di Fibonacci e il paradosso dei relativi quadrati**

Gruppo Eratostene

Abstract

In this paper we generalize the Fibonacci serie (based on couple 1; 1) to all infinite couple n; n, with n natural number.

Riassunto

In questo lavoro generalizziamo la serie di Fibonacci (basata sulla coppia numerica 1; 1) ad infinite serie basate sulle altrettanto infinite coppie n; n con n numero naturali. Con tale generalizzazione si risolve anche il cosiddetto paradosso dei quasi quadrati di Fibonacci, già da noi trattato in precedenza.

Introduzione

In un articolo precedente ("I quadrati di Fibonacci", Rif.1) abbiamo visto come il prodotto tra due numeri di Fibonacci alternati, per esempio 3, ***5*** e 8, sia il quadrato del numero centrale di una terna di Fibonacci, + 1; in questo esempio, 3*8 = 24 = 5^2 - 1 = 25 - 1; il segno algebrico + e - si alterna per ogni terna di Fibonacci successiva: per esempio, per la terna successiva 5, ***8***, 13 abbiamo infatti 5*13=65 = ***8***^2 +1 = 64 + 1, e per la successiva terna 8, ***13***, 21 abbiamo 8*21 = 168 = 13^2 - 1 = 169 -1, e così via all'infinito. Questo andamento è connesso al prodotto tra due numeri primi gemelli (o comunque numeri con differenza 2, per la quale i numeri gemelli sono un caso particolare: entrambi primi) ma con la nostra seguente generalizzazione della serie di Fibonacci, la differenza tra il prodotto dei due numeri esterni e il quadrato del numero centrale alla terna è il quadrato della semidifferenza tra i due numeri esterni della terna, o tra due altri fattori del prodotto N dei due numeri esterni alla terna, il che ci riporta all'algoritmo di Fermat (Rif.2).

4)) (parte seconda) **Generalizzazione della serie di Fibonacci ed il paradosso dei relativi quadrati - Seconda parte (sui triangoli di Fibonacci e connessione con i quadrati)**

Gruppo ERATOSTENE

Nella prima parte della nostra generalizzazione della serie di Fibonacci, abbiamo parlato dei quadrati Q + 1 della connessione tra generalizzazione e i suoi nuovi quadrati Q + n^2, in questa seconda parte accenneremo invece ai triangoli ottenuti sia con la serie normale di Fibonacci, sia ai nuovi triangoli ottenuti con la generalizzazione, e quindi alla connessione tra questi e i quadrati, nel senso che per tali nuovi quadrati, n^2, ora risulta multiplo dell'ipotenusa dei nuovi triangoli generalizzati. Ma andiamo con ordine.

Sia nella nuova voce di Wikipedia "Successione di Fibonacci, sia nel Block Notes Matematico del nostro collaboratore Ing. Rosario Turco (vedi Link sul nostro sito), si accenna ai triangoli di Fibonacci (dal suddetto Block, Fibonacci e dintorni" di domenica 3 gennaio 2010)"

5) ***Video sui numeri di Fibonacci:***
http://gold.libero.it/Stella112/10431458.html