STIMA RAPIDA LOGARITMICA PER IL CALCOLO DEL NUMERO DEI DIVISORI CON LA FORMULA DI AMITRANO

A cura del Gruppo Eratostene - http://www.gruppoeratostene.com/)

Con la collaborazione di Eugenio Amitrano
(http://www.atuttoportale.it/)

Contenuti dell'articolo:

	Titolo	Pag.
➢	Stima logaritmica della serie quoziente	2
➢	Descrizione	2
➢	Numero dei divisori	3
➢	Analisi della stima logaritmica	4
➢	Stime di primalità	4
➢	Conclusioni	5
➢	Riferimenti	6
➢	Nota 1	6
➢	Nota 2	7

Caltanissetta, *01 Agosto 2010*

↔

Stima logaritmica della serie quoziente

Dato in input un numero n, è possibile stimare l'ennesimo termine della serie quoziente S_n (vedi articolo di Amitrano *Rif.* n.1) attraverso la seguente relazione:

$$\boxed{S_n \approx n \cdot \log(n) + 2k \cdot \log(n)}$$

Dove k è l'esponente della potenza di dieci più vicina ad n.

Descrizione

Dall'articolo di Amitrano ricaviamo termini della serie quoziente, che vanno da 2 a 10, per elaborare la seguente tabella e per una possibile stima rapida e attendibile di tali termini:

***Nota**: Per questi termini risulta sempre $k = 1$

TABELLA n.1

A n	B Sn	C n·log(n)	D 2k·log(n)	E [C]	F [D]	G E+F	H C+D
2	3	1,386	1,386	1	1	2	2,773 ~ 3
3	5	3,296	2,197	3	2	**5 = Sn**	5,493 ~ 5
4	8	5,545	2,773	5	2	7	8,318 ~ 8
5	10	8,047	3,219	8	3	11	11,266 ~ **10**
6	14	10,751	3,584	10	3	13	14,334 ~ 14
7	16	13,621	3,892	13	3	**16 = Sn**	17,513 ~ **16**
8	20	16,636	4,159	16	4	**20 = Sn**	20,794 ~ **20**
9	23	19,775	4,394	19	4	**23 = Sn**	24,169 ~ **23**
10=10^1	27	23,026	4,605	23	4	**27 = Sn**	27,631 ~ **27**
…	…	…	…	…	…	…	…
113	554	534,195	18,91 (k=2)	534	18	552	553,104 ~ **554**

È stato aggiunto il 113° termine, in modo tale da effettuare una stima per un valore vicino a 10^2.

Notiamo che per il termine S_{113} abbiamo la seguente stima:

$$113 \cdot \log(113) + 2 \cdot 2 \cdot \log(113) \approx 553{,}104 \qquad \%Err = \frac{|554 - 553{,}104|}{554} \cdot 100\% = 0{,}16\%$$

Mentre per il termine S_9 abbiamo:

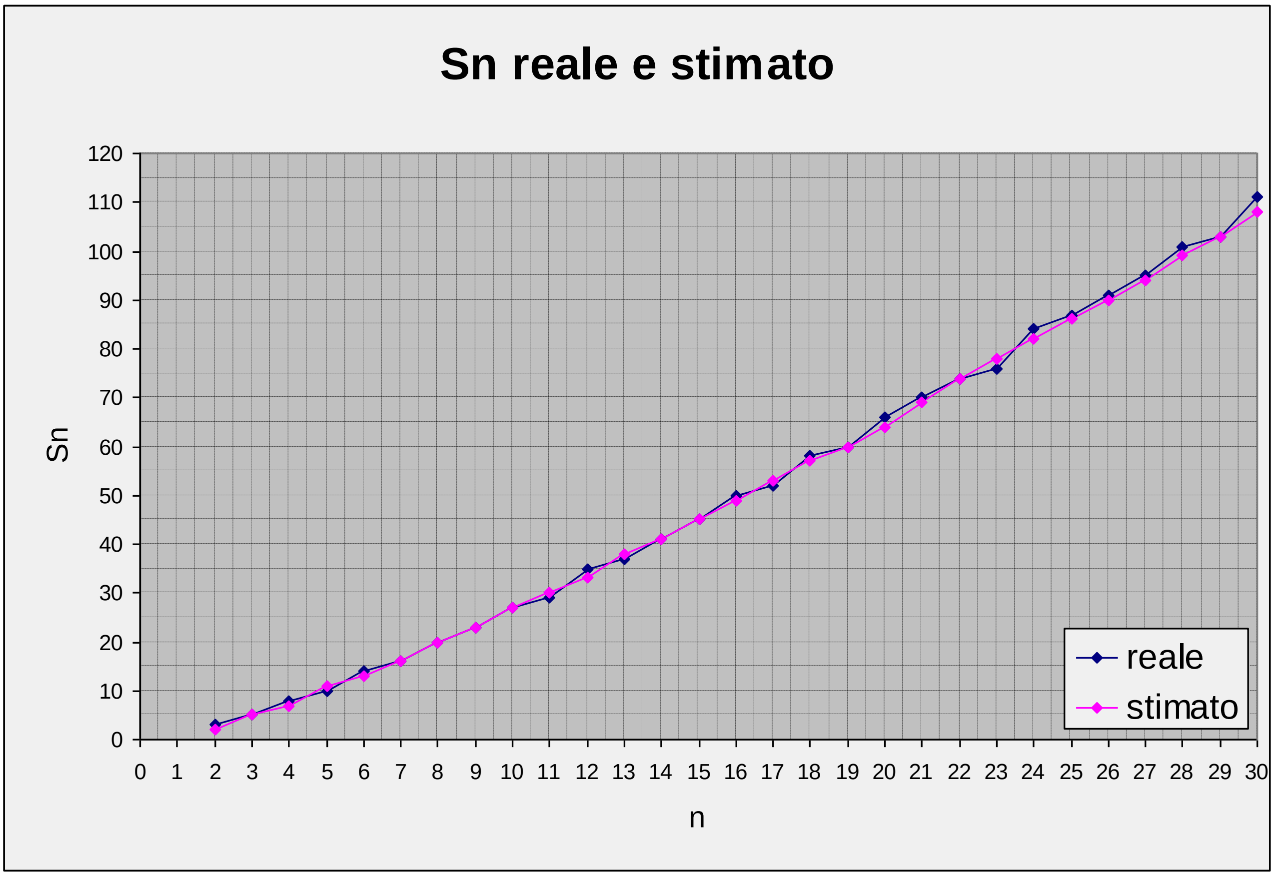
$$9 \cdot \log(9) + 2 \cdot 1 \cdot \log(9) \approx 24{,}169 \qquad \%Err = \frac{|23 - 24{,}169|}{23} \cdot 100\% = 5{,}08\%$$

Un valore molto più alto rispetto a S_{113}.

Risultati migliori, anche se di poco, si ottengono se si sommano le parti intere delle colonne **C** e **D** della Tabella n.1. Sempre nella tabella, le colonne **E** ed **F** riportano le parti intere rispettivamente delle colonne **C** e **D**, e la colonna **G** la loro somma.

Per apprezzare meglio la stima, riportiamo qui di seguito un grafico di confronto tra valori di S_n reali e stimati:

GRAFICO n.1 – Valori reali e stimati di S_n per n che va da 2 a 30.



Numero dei divisori

Calcolando le differenze reali successive $D_n = S_n - S_{n-1}$, otteniamo il numero dei divisori di n.

La successione, a partire da $n = 2$ che ne risulta è $\{2,2,3,2,4,2,4,3,4,...\}$.

Per $D_n = 2$ risulta che n è primo.

Ad esempio, per $2 \leq n \leq 10$ abbiamo:

TABELLA n.2

n	S_n	S_{n-1}	D_n
2	3	1	**2** (primo)
3	5	3	**2** (primo)
4	8	5	**3** (composto)
5	10	8	**2** (primo)
6	14	10	**4** (composto)
7	16	14	**2** (primo)
8	20	16	**4** (composto)
9	23	20	**3** (composto)
10	27	23	**4** (composto)

Analisi della stima logaritmica

Possiamo considerare il rapporto $\frac{S_n}{n}$ come la media aritmetica degli n valori successivi $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ ecc. Ad esempio per $n = 10$, $S_n = 27$, quindi $\frac{27}{10} = 2{,}7$. Notiamo che $\log(10) \approx 2{,}302$, un valore leggermente inferiore a $2{,}7$. Per colmare tale differenza per difetto, consideriamo il termine $2k \cdot \log(n) \approx 4{,}605$, che aggiunto al termine $n \cdot \log(n) \approx 23{,}026$, otteniamo $27{,}631$, ottima approssimazione $S_{10} = 27$.

Da qui la formula logaritmica per la stima approssimativa e attendibile di S_n:

$$\boxed{S_n \approx n \cdot \log(n) + 2k \cdot \log(n)} \quad \textbf{(1)}$$

Ricordiamo che k è l'esponente della potenza di dieci più vicina ad n.
Ad esempio per $n = 113$, la potenza di dieci più vicina è $100 = 10^2$, pertanto $k = 2$.

Stime di primalità

Il termine $n \cdot \log(n)$, componente della **(1)** è la formula per stimare un numero che abbia circa n numeri primi.

Il termine $n + \log(n)$, dove n è un numero primo, è la stima per il numero primo successivo. Mentre $n - \log(n)$ è la stima per il numero primo precedente.

Ad esempio, poniamo $n = 113$ che è un numero primo, la stima per il numero primo successivo è $113 + \log(113) \approx 117{,}73 \sim 117$, infatti, 117 è il numero primo successivo a 113, mentre la stima per il numero precedente è $113 - \log(113) \approx 108{,}27 \sim 107$ dove 107 è il numero primo precedente a 113.

La formula $\frac{n}{\log(n)} \sim \pi(n)$ è anche la nota formula logaritmica di Gauss per la stima logaritmica dei numeri primi fino ad n (*ora sostituita da formule molto più precise, per es. quelle che usano il logaritmo integrale o la funzione zeta*). Mentre $n \cdot \log(n)$ restituisce il numero fino al quale ci sono $\pi(n)$ numeri primi.

Con i nostri algoritmi (vedi sezione "Programmi&Software" del sito del gruppo Eratostene *Rif.* n.2) abbiamo $\pi(113) = 29$ numeri primi invece del numero reale 30, e $\pi(533) = 99$ anziché il valore reale 113. Con altri algoritmi, per esempio quello dell'Ing. Giuseppe Merlino, (vedi "Studio di intervalli numerici" sezione Programmi & Software"), si ottiene 100 anziché 99. Ma abbiamo anche $113 \cdot \ln(113) \approx 534{,}2$ molto vicino al valore reale.

Le due formule, per $\pi(n)$ e S_n, quindi, si somigliano molto, ma le differenze tra S_n e S_{n-1} stimate, non corrispondendo sempre a 2 quando n è numero primo, pertanto le stime non possono essere usate per il test di primalità proposto da Amitrano, peraltro molto lento rispetto ad algoritmi moderni molto veloci, i quali se pur non essendo reali sono molto vicini alla realtà.

Esempio per $n = 113$:

Valori stimati:

$S_{113} = 113 \cdot \log(113) + 2 \cdot 2 \cdot \log(113) \approx 553{,}104$ Parte intera 553
$S_{112} = 112 \cdot \log(112) + 2 \cdot 2 \cdot \log(112) \approx 547{,}346$ Parte intera 547

Calcolando $553 - 547 = 6$, maggiore di 2 come dovrebbe essere nel caso di n primo e quindi le nostre stime non possono essere usate come test di primalità, per il quale occorrono invece occorrono i valori reali.

Ulteriori miglioramenti delle nostre stime potrebbero tuttavia essere possibili, oppure possiamo ottenere valori reali di S_n anche con i nostri algoritmi (vedi articolo dell'Ing. Turco *Rif.* n.4, vedi anche Nota 2).

Conclusioni

Il test di primalità proposto da Eugenio Amitrano è, come abbiamo già segnalato, molto lento rispetto ad altri algoritmi più veloci oggi noti. La nostra stima logaritmica approssimativa della somma dei divisori (parte intera) sembra attendibile, anche se ancora non trova applicazioni utili.

Riferimenti

1) *Eugenio Amitrano* – Formula per la determinazione del numero dei divisori
Link: http://www.atuttoportale.it/articoli/matematica/Formulanumerodidivisori.pdf
Descritto nel sito http://www.math.it/ e nel sito http://www.matematicamente.it/

2) Sezione: "Programmi & Software" del nostro sito "*Gruppo Eratostene*"
Link: http://www.gruppoeratostene.com

3) *Di Noto*, *Turco* - Sulle spalle dei giganti
Link:http://www.gruppoeratostene.com/articoli/giganti.pdf
Descritto nel sito http://mathworld.wolfram.com/DirichletDivisorProblem.html

4) *Ing. Rosario Turco* - Il crivello di Dirichlet. Il problema dei divisori di Dirichlet
Link: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/PDC.pdf

Nota 1

Verifica per $n = 25$, $D_{25} = S_{25} - S_{24}$

Con la formula di Amitrano:

$$S_{25} = \sum_{i=1}^{25}\left[\frac{25}{i}\right] = \left[\frac{25}{1}\right] + \left[\frac{25}{2}\right] + \left[\frac{25}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{25}{24}\right] + \left[\frac{25}{25}\right] =$$

$$S_{25} = 25+12+8+6+5+4+3+3+2+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 87$$

$$S_{24} = \sum_{i=1}^{24}\left[\frac{24}{i}\right] = \left[\frac{24}{1}\right] + \left[\frac{24}{2}\right] + \left[\frac{24}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{24}{23}\right] + \left[\frac{24}{24}\right] =$$

$$S_{24} = 24+12+8+6+4+4+3+3+2+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 84$$

Verifichiamo che per $n = 25$, $D_{25} = 87 - 84 = 3$, infatti, il 25 è un numero composto, poiché $25 = 5^2 = 5 \times 5$.

Stima logaritmica:

$S_{25} \approx 25 \cdot \log(25) + 2 \cdot \log(25) \approx 86{,}91$ parte intera 86. (*valore quasi esatto*)
$S_{24} \approx 24 \cdot \log(24) + 2 \cdot \log(24) \approx 82{,}63$ parte intera 82.

Per i numeri di forma $6k \pm 1$ avremo, in generale:

- $S_{6k-1} - S_{6k-2} = 2$
- $S_{6k+1} - S_{6k} = 2$

Questo quando $6k-1$ e $6k+1$ sono primi, e lo è per molti valori di k.

Da notare che la differenza 2 vale anche per $n=2$ e per $n=3$, i due numeri primi iniziali, anche se non sono nella forma $6k \pm 1$.

Nota 2

Un breve programma dell'Ing. Rosario Turco (*Rif.4*):

```
/*
 * Divisori con serie quoziente
 */
debug=0;
Prim(N) = local(S=0, ret=0);
{
   S = sum(i=1,N-2,floor(N/i)-floor((N-1)/i)) + floor(N/(N-1));
   if(debug, print("Divisori di N = ", S););
   if(S == 2, if(debug,print("E' primo"););  ret=1;);
   return(ret);
}
```