http://www.atuttoportale.it/
presenta

Lezioni di matematica a cura di *Eugenio Amitrano*

Argomento n.1

Cenni di insiemistica

Nazionale Italiana di Calcio –South Africa 2010

Contenuti:

↔

Concetto d'insieme

Il concetto d'insieme è un concetto primitivo, cioè non è possibile definirlo con concetti più elementari. La parola insieme è sinonimo di sostantivi come collezione e aggregato, infatti, le persone tendono spontaneamente a pensare l'insieme come un gruppo di oggetti, persone o animali, che possiedono una proprietà comune, cioè quella proprietà che li rende appartenenti a quel gruppo. Questo concetto, se pur limitato, è molto utile per intraprendere la strada verso la comprensione matematica degli insiemi.

Un insieme, quindi, è intuitivamente immaginato come un gruppo di **elementi**, tutti aventi una stessa proprietà detta **proprietà caratteristica**. Esistono numerosi esempi di insieme: I giocatori di una stessa squadra, i francobolli della mia collezione, le città italiane, ecc…

Generalmente, in matematica, gli insiemi vengono indicati con le lettere latine maiuscole $\{A, B, C, ...\}$, mentre gli elementi con le lettere latine minuscole $\{a, b, c, ...\}$. Per indicare che un elemento a appartiene all'insieme A si scrive $a \in A$, dove $\in$ è il simbolo di **appartenenza** e la scrittura $a \in A$ si legge "*l'elemento **a** appartiene all'insieme **A***". Analogamente la NON appartenenza viene indicata con il simbolo $\notin$.

Ad esempio, indichiamo con g l'elemento gatto, e con A e V rispettivamente il regno animale e vegetale, possiamo scrivere con facilità che $g \in A$ e $g \notin V$, poiché sappiamo benissimo che il gatto appartiene al regno animale ma non a quello vegetale.

Definizione di Cantor: *Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti della nostra percezione o del nostro pensiero concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono gli elementi dell'insieme.*

↔

Rappresentazione di un insieme

Matematicamente, è possibile rappresentare un insieme in tre modi differenti:

Rappresentazione **TABULARE**

La rappresentazione tabulare, che vuol dire "per elencazione", si ottiene appunto elencando tutti gli elementi tra due parentesi graffe separati da una virgola:

$$A = \{elemento1, elemento2, elemento3, \ldots\}$$

Esempi:

Insieme delle vocali: $A = \{a, e, i, o, u\}$
Insieme dei punti cardinali: $B = \{nord, sud, ovest, est\}$
Insieme dei primi 7 numeri interi positivi: $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Rappresentazione **CARATTERISTICA**

La rappresentazione caratteristica è quel tipo di rappresentazione in cui tra le parentesi graffe viene indicata la proprietà caratteristica P che hanno in comune tutti gli elementi di quel determinato insieme:

$$A = \{x : P(x)\}$$

Il simbolo ":" significa "**tale che**", infatti la scrittura $A = \{x : P(x)\}$, si legge "*L'insieme **A** è costituito dagli elementi **x** tale che per **x** vale la proprietà **P***". Un'importante osservazione è che se un elemento gode della proprietà caratteristica di un insieme, esso ne farà parte certamente.

Esempi:

Insieme delle vocali: $A = \{x : x..è..una..vocale\}$
Insieme dei punti cardinali: $B = \{x : x..è..un..punto..cardinale\}$
Insieme dei primi 7 numeri interi positivi: $C = \{x : x \in \mathrm{N}..et..1 \le x \le 7\}$ **(*1)**

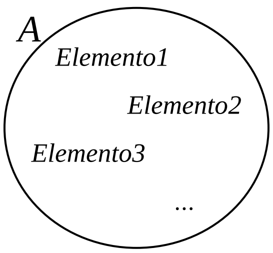
(*1) $\mathrm{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots,n,\ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali (*vedi paragrafo 8*), cioè i numeri interi positivi mentre et è la "*e congiunzione*" in lingua latina. In questo caso la scrittura

$C = \{x : x \in \mathrm{N}..et..1 \le x \le 7\}$ si legge "*L'insieme **C** è costituito dagli elementi **x** tali che sono numeri naturali e compresi o uguali tra 1 e 7*".

Rappresentazione **GRAFICA**

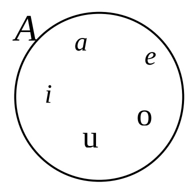
La rappresentazione grafica, invece, si ottiene rappresentando graficamente gli elementi dell'insieme, quest'ultimi racchiusi in una linea curva chiusa, che generalmente è una circonferenza.

Questa rappresentazione è anche conosciuta come **diagramma di *Eulero-Venn***:

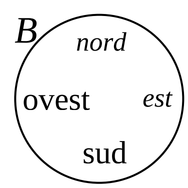


Esempi:

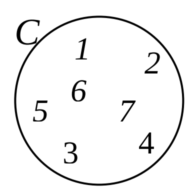
Insieme delle vocali:



Insieme dei punti cardinali:



Insieme dei primi 7 numeri interi positivi:



↔

Alcune definizioni

- Un insieme si dice **finito** se è finito il numero dei suoi elementi. Ad esempio l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano è un insieme finito, poiché è costituito da un numero limitato di elementi. Infatti, l'alfabeto italiano è costituito da 21 lettere. Analogamente, un insieme si dice **infinito** se è infinito il numero dei suoi elementi.

- Un insieme si dice **vuoto**, e si indica con il simbolo $\varnothing$, se è privo di elementi. Ad esempio, l'insieme degli elettori italiani con meno di 18 anni è un insieme vuoto, infatti, il diritto al voto in Italia si acquista con la maggiore età, quindi non esistono elettori minorenni.

- La **cardinalità** di un insieme A, e si indica con $|A|$ oppure con $card(A)$, è rappresentata dal numero degli elementi che lo costituiscono. Ad esempio l'insieme delle vocali è costituito da 5 elementi, quindi la sua cardinalità è 5. Mentre, la cardinalità di un insieme vuoto è zero.

- Due insiemi A e B si dicono **coincidenti** se sono costituiti dai medesimi elementi, *cioè se rappresentano lo stesso insieme*. La coincidenza tra i due insiemi si indica con la scrittura $A = B$. Analogamente, due insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune. Ad esempio l'insieme delle vocali e l'insieme delle consonanti sono disgiunti poiché non hanno lettere, quindi elementi in comune.

- Diremo che l'insieme A è un **sottoinsieme** dell'insieme B, se l'insieme B contiene tutti gli elementi dell'insieme A. Ad esempio, possiamo dire che l'insieme delle vocali è un sottoinsieme dell'alfabeto, infatti, l'alfabeto contiene tutte le vocali. Per indicare che l'insieme A è sottoinsieme di B, si scrive $A \subseteq B$, dove il simbolo $\subseteq$ significa incluso.

La definizione di sottoinsieme, non esclude il fatto che ogni insieme è anche sottoinsieme di se stesso. Ogni insieme contiene tutti i suoi elementi e quindi include se stesso. Se vogliamo escludere a priori la coincidenza tra l'insieme A e l'insieme B, occorre utilizzare il simbolo $\subset$ che indica l'inclusione in senso stretto. Quindi con la scrittura $A \subset B$ diremo che l'insieme A è **incluso strettamente** in B, cioè che tutti gli elementi di A compaiono in B, ma anche che A non coincide con B. Cioè, l'insieme B contiene altri elementi oltre a tutti gli elementi di A. In questo caso si dice anche che l'insieme A è **sottoinsieme proprio** di B.

- Si definisce **insieme delle parti** di A e si indica generalmente con $P(A)$, l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di A. Quindi, dato un insieme A, ed elenchiamo tutti i suoi sottoinsiemi, tali sottoinsiemi saranno gli elementi dell'insieme delle parti di A. Inoltre, per ogni insieme finito A, la cardinalità dell'insieme delle parti è data dalla seguente relazione:

$$card(P(A)) = 2^{card(A)}$$

Ad esempio:

Insieme:	$A = \{a, b, c\}$
Insieme delle parti:	$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
Cardinalità di A:	$card(A) = 3$
Cardinalità di $P(A)$:	$card(P(A)) = 2^3 = 8$

- Si definisce **insieme universo** e si indica con U, l'insieme che contiene tutti gli insiemi esistenti, compreso l'insieme vuoto. Quindi qualsiasi insieme, per quanto piccolo o grande sia, finito o infinito, è incluso nell'insieme universo.

↔

Operazioni tra insiemi

Come per i numeri, anche per gli insiemi è possibile effettuare operazioni. I risultati delle operazioni effettuate sui numeri produce come risultati altri numeri, così come i risultati delle operazioni tra insiemi produce come risultati altri insiemi.

Operazione **UNIONE**

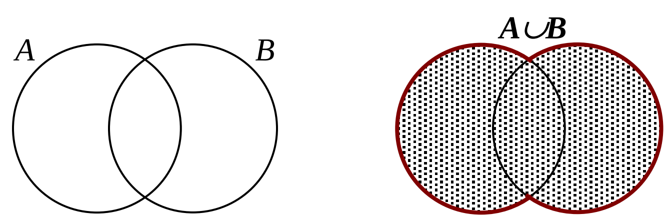
L'unione tra due insiemi A e B, si scrive $A \cup B$ e si legge "***A** unito **B***", è quell'insieme che contiene sia gli elementi di A che gli elementi di B. È proprio come se i due insiemi si fondessero in un unico insieme.

Ad esempio:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{1,3,5,7,9\} \qquad A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

Ovviamente, gli elementi comuni tra i due insiemi non devono essere presi due volte. Da notare che nell'esempio gli elementi $\{1,3,5\}$ sono comuni tra A e B, ma nell'unione compaiono una sola volta.

Rappresentazione grafica dell'unione:



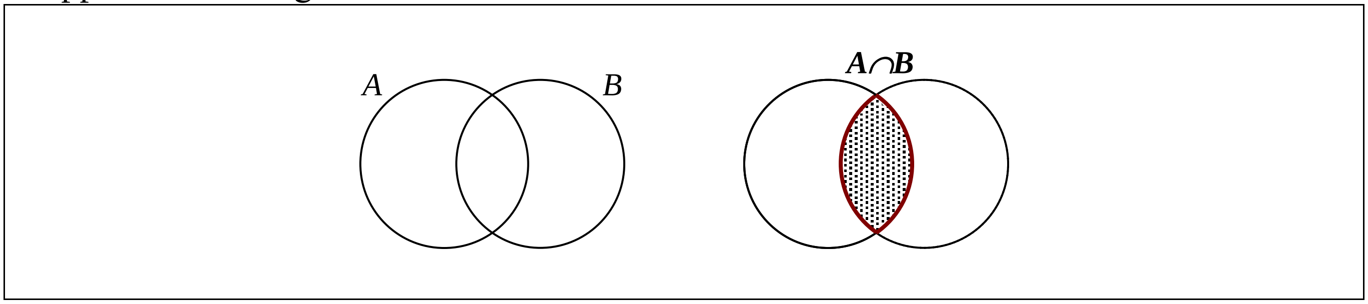
Operazione **INTERSEZIONE**

L'intersezione tra due insiemi A e B, si scrive $A \cap B$ e si legge "***A** intersecato **B***", è quell'insieme che contiene gli elementi di A che compaiono anche in B.
Praticamente l'intersezione tra due insiemi è quell'insieme che contiene solo gli elementi comuni tra i due insiemi.

Ad esempio:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{1,3,5,7,9\} \qquad A \cap B = \{1,3,5\}$$

Rappresentazione grafica dell'intersezione:



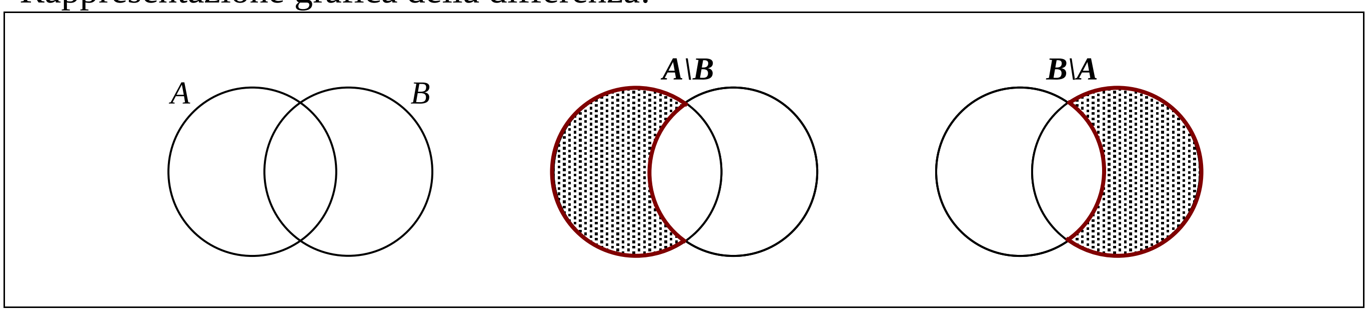
Operazione **DIFFERENZA**

La differenza tra due insiemi, in particolare la differenza di A da B, si scrive $A \setminus B$, è quell'insieme che contiene gli elementi di A che NON compaiono in B. Viceversa, la differenza di B da A ($B \setminus A$) è quell'insieme che contiene gli elementi di B che NON compaiono in A. Praticamente si escludono gli elementi comuni tra i due insiemi.

Ad esempio:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{1,3,5,7,9\} \qquad A \setminus B = \{2,4\} \qquad B \setminus A = \{7,9\}$$

Rappresentazione grafica della differenza:

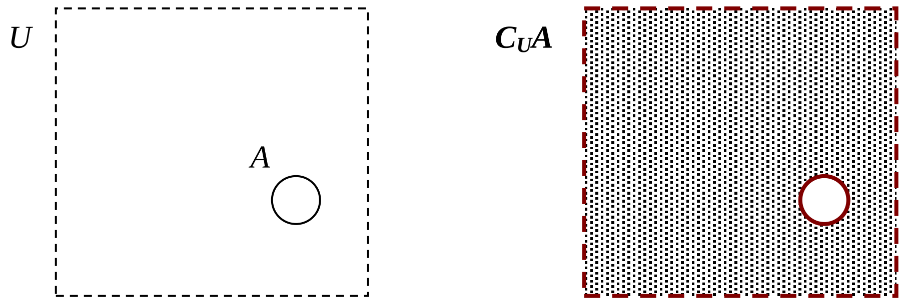


In questo caso l'insieme differenza, viene anche detto **complementare**.

Il complementare di un insieme A rispetto ad un altro insieme B si indica con $C_B A$ e si legge "*Complementare di **A** da **B***".

Questo tipo di complementare rappresenta un **complementare relativo**, poiché viene riferito rispetto ad un altro insieme, mentre se viene riferito rispetto all'insieme universo allora parliamo di **complementare assoluto**. Il complementare assoluto di A si indica con $C_U A$, ed è rappresentato da tutto l'universo tranne l'insieme A.

Rappresentazione grafica del complementare assoluto:



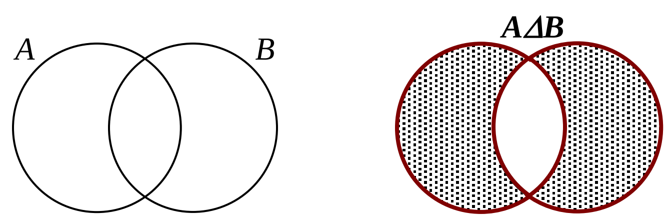
Operazione **DIFFERENZA SIMMETRICA**

La differenza simmetrica tra due insiemi A e B, si scrive $A \Delta B$, è l'inverso dell'intersezione, ossia è quell'insieme che contiene gli elementi di A che non compaiono in B e gli elementi di B che non compaiono in A. Praticamente uniamo i due insiemi ed eliminiamo gli elementi comuni.

Ad esempio:

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{1,4,9\} \qquad A \Delta B = \{2,3,4,9\}$$

Rappresentazione grafica della differenza simmetrica:



Operazione **PRODOTTO CARTESIANO**

Il prodotto cartesiano tra due insiemi non vuoti A e B, si scrive $A \times B$ e si legge "***A** per **B***" oppure "***A** cartesiano **B***", è l'insieme formato da tutte le coppie ordinate di cui il primo elemento appartiene ad A ed il secondo appartiene a B. Ad ogni elemento di A, accoppiamo tutti gli elementi di B.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A .et. b \in B\}$$

Ad esempio:

$$A = \{a, b\} \qquad B = \{x, y, z\} \qquad A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$$

Poiché il prodotto cartesiano è costituito da coppie ordinate, non vale la proprietà commutativa cioè $A \times B \neq B \times A$. Se cambiamo l'ordine degli insiemi il risultato cambia.

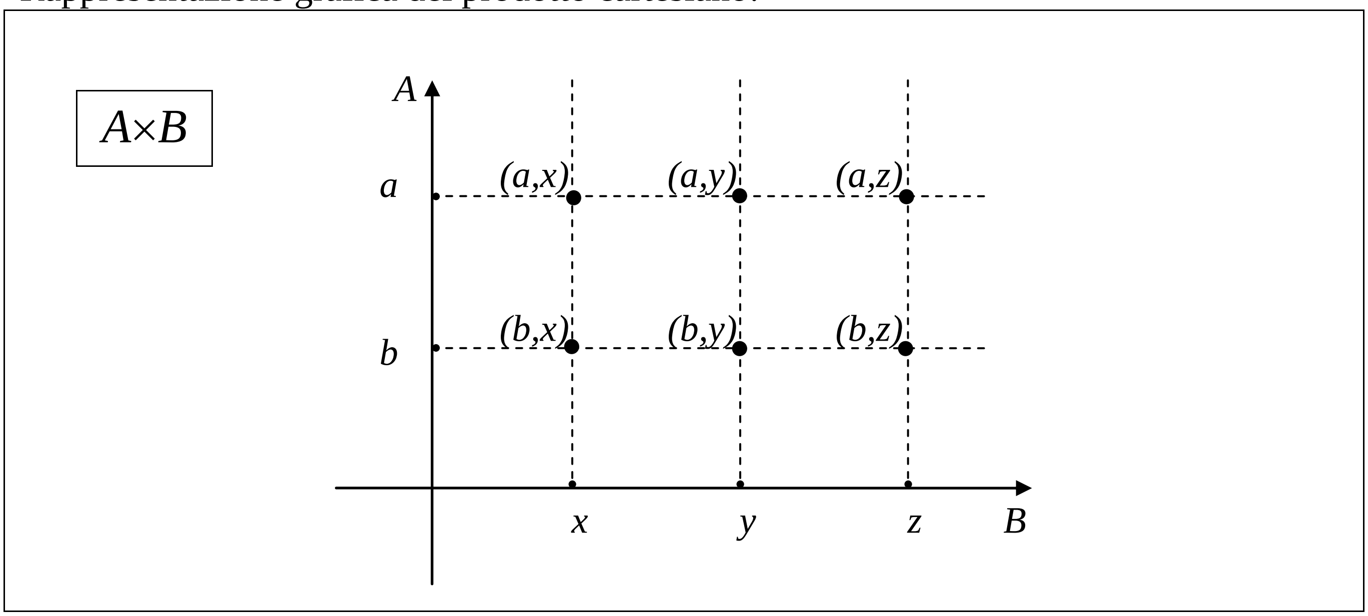
Infatti, utilizzando gli insiemi dell'esempio precedente otteniamo:

$$A = \{a, b\} \qquad B = \{x, y, z\}$$

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$$

$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\}$$

Rappresentazione grafica del prodotto cartesiano:



↔

Proprietà degli insiemi

- Proprietà **dell'inclusione dell'insieme vuoto**

  Def: Qualsiasi insieme contiene l'insieme vuoto, cioè ha l'insieme vuoto come sottoinsieme.

$$\boxed{\forall A \quad \varnothing \subseteq A} \qquad \textbf{(*2)}$$

(*2) Il simbolo $\forall$ significa generalmente "per ogni", può acquisire significati analoghi come "qualunque sia", "per qualsiasi", ecc.

La scrittura $\forall A$ si potrebbe leggere "*qualunque sia l'insieme* ***A***".

- Proprietà **riflessiva dell'inclusione**

  Def: Ogni insieme include se stesso.

$$\boxed{\forall A \quad A \subseteq A}$$

- Proprietà **antisimmetrica dell'inclusione**

  Def: Dati due insiemi A e B, se A è sottoinsieme di B, e contemporaneamente B è sottoinsieme di A, allora $A = B$.

$$\boxed{A \subseteq B..et..B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B} \qquad \textbf{(*3)}$$

(*3) Il simbolo $\Rightarrow$ significa "implica", cioè, l'affermazione che si trova alla sinistra della freccia implica la conseguenza che si trova alla destra della freccia. Nel nostro caso $\boxed{A \subseteq B..et..B \subseteq A}$ è l'affermazione, mentre $\boxed{A = B}$ è la conseguenza.

- Proprietà **transitiva dell'inclusione**

  Def: Dati tre insiemi A, B e C, se A è sottoinsieme di B, e contemporaneamente B è sottoinsieme di C, allora A è sottoinsieme di C.

$$\boxed{A \subseteq B..et..B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C}$$

- Proprietà delle **operazioni**

Per le proprietà che seguono, sarebbe superfluo commentarle con parole, in quanto a questo punto il lettore avrà certamente appreso con una certa sicurezza il linguaggio utilizzato per rappresentarle.

- Proprietà **commutativa**: $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ $\boxed{A \cap B = B \cap A}$
- Proprietà **associativa**: $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

  $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$
- Proprietà **distributiva**: $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

  $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- Proprietà dell'**assorbimento**: $\boxed{A \cup (A \cap B) = A}$ $\boxed{A \cap (A \cup B) = A}$
- Proprietà dell'**idem potenza**: $\boxed{A \cup A = A}$ $\boxed{A \cap A = A}$
- Proprietà dell'**insieme vuoto**: $\boxed{A \cup \varnothing = A}$ $\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}$
- Proprietà di **inclusione**: $\boxed{A \subseteq (A \cup B)}$ $\boxed{B \subseteq (A \cup B)}$

  $\boxed{(A \cap B) \subseteq A}$ $\boxed{(A \cap B) \subseteq B}$
- Proprietà della **differenza**: $\boxed{A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$

  $\boxed{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}$
- Proprietà del **complementare**: $\boxed{C_B (C_B A) = A}$ $\boxed{A \cup (C_B A) = B}$

  $\boxed{A \cap (C_B A) = \varnothing}$ $\boxed{C_U A \subseteq C_U B \Leftrightarrow B \subseteq A}$
- Regole di **De Morgan**:

Il complementare di un'unione è l'intersezione dei complementari: $\boxed{C_U (A \cup B) = C_U A \cap C_U B}$

Il complementare di un'intersezione è l'unione dei complementari: $\boxed{C_U (A \cap B) = C_U A \cup C_U B}$

$\leftrightarrow$

Relazioni tra insiemi

Dati due insiemi non vuoti, è possibile definire una **regola** che possa creare una **corrispondenza**, cioè delle associazioni, tra gli elementi dei due insiemi.

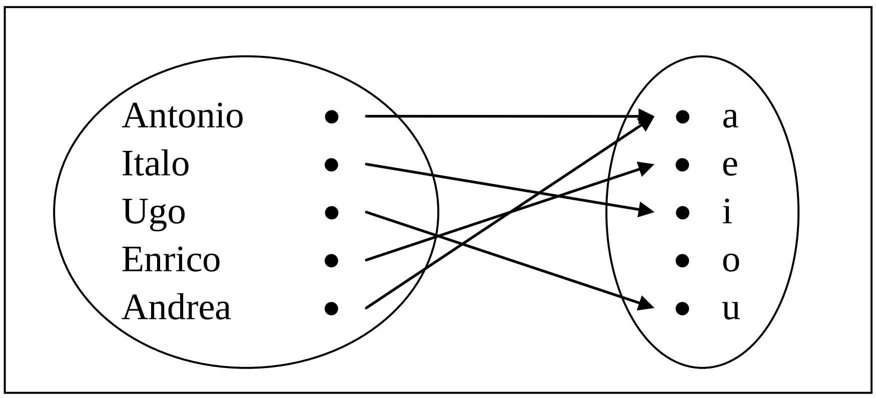
Ad esempio consideriamo i seguenti due insiemi:

$$A = \{antonio, italo, ugo, enrico, andrea\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Creiamo la seguente regola:

"Associare ad ogni nome dell'insieme A ad una lettera dell'insieme B affinché quest'ultima sia la sua lettera iniziale."

E rappresentiamo graficamente le associazioni:



Per la rappresentazione dei due insiemi si utilizza il diagramma di Eulero-Venn.
L'intero grafico è rappresentato dai due insiemi con delle frecce che associano gli elementi (*le corrispondenze*), e siccome la parola freccia deriva dalla parola latina sagitta, tale rappresentazione è stata definita **rappresentazione sagittale**.

Ora rappresentiamo attraverso una tabella a doppia entrata, il prodotto cartesiano dei due insiemi ($A \times B$), indicando in ogni casella la relativa coppia ordinata. Inoltre, mettiamo in evidenza le caselle delle coppie che seguono la regola che precedentemente abbiamo imposto (*associazione nome con lettera iniziale*):

Mettiamo sulla prima riga gli elementi dell'insieme A e sulla prima colonna quelli dell'insieme B.

	Antonio	Italo	Ugo	Enrico	Andrea
a	**(Antonio, a)**	(Italo, a)	(Ugo, a)	(Enrico, a)	**(Andrea, a)**
e	(Antonio, e)	(Italo, e)	(Ugo, e)	**(Enrico, e)**	(Andrea, e)
i	(Antonio, i)	**(Italo, i)**	(Ugo, i)	(Enrico, i)	(Andrea, i)
o	(Antonio, o)	(Italo, o)	(Ugo, o)	(Enrico, o)	(Andrea, o)
u	(Antonio, u)	(Italo, u)	**(Ugo, u)**	(Enrico, u)	(Andrea, u)

L'insieme delle coppie evidenziate, cioè quello formato dalle coppie che rispettano la regola è il seguente:

$$R = \{(Antonio, a), (Italo, i), (Ugo, u), (Enrico, e), (Andrea, a)\}$$

È facile notare che l'insieme R è sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, poiché ne contiene solo alcuni elementi $R \subset A \times B$, e in questo caso diremo che l'insieme R è una **relazione** tra l'insieme A e l'insieme B.

In generale una relazione tra due insiemi A e B è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano $A \times B$, e con la scrittura $a \Re b$ si indica la proprietà, o la regola, quindi la relazione tra gli elementi che permette di associare gli elementi dei due insiemi.

(*Occorre fare attenzione a non confondere la **relazione tra elementi**, ossia la regola che permette di creare le corrispondenze tra gli elementi dei due insiemi, con la **relazione tra insiemi** che invece è l'insieme delle coppie che rispettano la regola.)*

In realtà, questa definizione di relazione tra insiemi è riduttiva, in quanto le relazioni possono esserci anche tra più di due insiemi. Nel nostro caso, cioè nel caso di soli due insiemi, si parla di **relazione binaria**.

Con un piccolo artificio, è possibile applicare la relazione binaria anche su un solo insieme. Ad esempio, nel caso di un insieme A, per creare una relazione binaria con se stesso, possiamo supporre l'esistenza di un secondo insieme B coincidente con A. $A = B$.

Esempio (***Rif.1***):

Insieme: $A = \{Ugo, Marco, Ciro, Uriele, Maria\}$
Regola: $\Re =$ "*…ha la stessa lettera iniziale di…*"

Prodotto cartesiano $A \times A$ in tabella, con evidenza delle coppie che rispettano la regola:

	Ugo	Marco	Ciro	Uriele	Maria
Ugo	**(Ugo,Ugo)**	(Marco,Ugo)	(Ciro,Ugo)	**(Uriele,Ugo)**	(Maria,Ugo)
Marco	(Ugo,Marco)	**(Marco,Marco)**	(Ciro,Marco)	(Uriele,Marco)	**(Maria,Marco)**
Ciro	(Ugo,Ciro)	(Marco,Ciro)	**(Ciro,Ciro)**	(Uriele,Ciro)	(Maria,Ciro)
Uriele	**(Ugo,Uriele)**	(Marco,Uriele)	(Ciro,Uriele)	**(Uriele,Uriele)**	(Maria,Uriele)
Maria	(Ugo,Maria)	**(Marco,Maria)**	(Ciro,Maria)	(Uriele,Maria)	**(Maria,Maria)**

$$R = \begin{Bmatrix} (Ugo,Ugo),(Marco,Marco),(Ciro,Ciro),(Uriele,Uriele),(Maria,Maria), \\ (Uriele,Ugo),(Maria,Marco),(Ugo,Uriele),(Marco,Maria) \end{Bmatrix}$$

Di seguito illustreremo alcune proprietà delle relazioni binarie su un solo insieme.

Una relazione binaria su un solo insieme, in combinazione con particolari proprietà può anche essere associata alle seguenti relazioni:

Relazione **RIFLESSIVA**

Una relazione è riflessiva se contiene la diagonale principale. Per diagonale principale si intende l'insieme delle coppie formate dallo stesso elemento $R = \{(x,x),(y,y),...\}$.

Def. Per un insieme A vale la relazione riflessiva se $\forall a \in A \Rightarrow a\Re a$.

Nell'esempio Rif. 1 a Pag. 15, la relazione è riflessiva, infatti, ogni nome ha la stessa iniziale di se stesso e quindi la diagonale principale è contenuta nella relazione:

	Ugo	Marco	Ciro	Uriele	Maria
Ugo	**(Ugo,Ugo)**	(Marco,Ugo)	(Ciro,Ugo)	**(Uriele,Ugo)**	(Maria,Ugo)
Marco	(Ugo,Marco)	**(Marco,Marco)**	(Ciro,Marco)	(Uriele,Marco)	**(Maria,Marco)**
Ciro	(Ugo,Ciro)	(Marco,Ciro)	**(Ciro,Ciro)**	(Uriele,Ciro)	(Maria,Ciro)
Uriele	**(Ugo,Uriele)**	(Marco,Uriele)	(Ciro,Uriele)	**(Uriele,Uriele)**	(Maria,Uriele)
Maria	(Ugo,Maria)	**(Marco,Maria)**	(Ciro,Maria)	(Uriele,Maria)	**(Maria,Maria)**

Un'altra relazione riflessiva è $\Re =$ "*…ha lo stesso cognome di…*", in quanto ognuno ha lo stesso cognome di se stesso.

Invece, una relazione <u>non riflessiva</u> è $\Re =$ "*…è più alto di…*", infatti, nessuno è più alto di se stesso, pertanto la diagonale principale ne è esclusa.

Relazione **SIMMETRICA**

Una relazione è simmetrica se per ogni coppia contenuta è presente anche la sua simmetrica rispetto alla diagonale principale. Data una coppia (x, y), la sua coppia simmetrica rispetto alla diagonale è (y, x).

Def. Per un insieme A vale la relazione simmetrica se $\forall a,b \in A : a\Re b \Rightarrow b\Re a$.

Sempre nell'esempio Rif. 1 a Pag. 15, la relazione è anche simmetrica, infatti, per ogni coppia di nomi, ad esempio $(Uriele,Ugo)$, la coppia simmetrica $(Ugo,Uriele)$ gode della stessa proprietà, cioè vale la stessa regola: (*ha la stessa lettera iniziale di*):

	Ugo	**Marco**	**Ciro**	**Uriele**	**Maria**
Ugo	**(Ugo,Ugo)**	(Marco,Ugo)	(Ciro,Ugo)	**(Uriele,Ugo)**	(Maria,Ugo)
Marco	(Ugo,Marco)	**(Marco,Marco)**	(Ciro,Marco)	(Uriele,Marco)	**(Maria,Marco)**
Ciro	(Ugo,Ciro)	(Marco,Ciro)	**(Ciro,Ciro)**	(Uriele,Ciro)	(Maria,Ciro)
Uriele	**(Ugo,Uriele)**	(Marco,Uriele)	(Ciro,Uriele)	**(Uriele,Uriele)**	(Maria,Uriele)
Maria	(Ugo,Maria)	**(Marco,Maria)**	(Ciro,Maria)	(Uriele,Maria)	**(Maria,Maria)**

Un'altra relazione simmetrica è ad esempio $\Re =$ "…*ha lo stesso cognome di*…", infatti, questa relazione è simmetrica in quanto se $Maria$ ha lo stesso cognome di $Ciro$ è evidente che anche $Ciro$ ha lo stesso cognome di $Maria$.

La relazione $\Re =$ "…*è più alto di*…", oltre a non essere riflessiva è anche non simmetrica, verifichiamo subito che se $Uriele$ è più alto di Ugo, sicuramente non vale l'opposto, cioè Ugo non può essere più alto di $Uriele$.

Relazione **ANTISIMMETRICA**

La relazione antisimmetrica, come lo si intuisce dal nome, è l'opposto della relazione simmetrica.

Def. Per un insieme A vale la relazione antisimmetrica se $\forall a,b \in A : a\Re b \not\Rightarrow b\Re a$.

Richiamiamo la relazione non simmetrica $\Re =$ "…*è più alto di*…", questa relazione è antisimmetrica, poiché se $Uriele$ è più alto di Ugo, Ugo non è più alto di $Uriele$.

Relazione **TRANSITIVA**

Per un insieme A vale la relazione transitiva se $\forall a,b,c \in A : a\Re b..et..b\Re c \Rightarrow a\Re c$. La relazione del nostro esempio (*stessa lettera iniziale*) è una relazione transitiva, infatti, considerando i seguenti tre elementi:

$$Antonio, Andrea\ e\ Anna$$

Basta verificare che $Antonio\Re Andrea.$ e che $Andrea\Re Anna$, infatti hanno la stessa lettera iniziale, per dedurre che vale anche la relazione $Antonio\Re Anna$.

Un'altra relazione transitiva è $\Re =$ "*…più ricco di…*". Se $Antonio$ è più ricco di $Andrea$ che è più ricco di $Anna$, è evidente che $Antonio$ è più ricco di $Anna$.

Una relazione non transitiva invece è $\Re =$ "*…è amico di…*", infatti se $Antonio$ è amico di $Andrea$, e $Andrea$ è amico di $Anna$, non è detto che $Antonio$ è amico di $Anna$.

Relazione **DI EQUIVALENZA**

Def. Una relazione è una relazione di equivalenza se è contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Ad esempio, la relazione $\Re =$ "*…ha la stessa lettera iniziale di…*" utilizzata nell'esempio Rif.1, è una relazione di equivalenza, infatti, è contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Relazione **D'ORDINE**

Def. Una relazione è una relazione d'ordine se è contemporaneamente riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Ad esempio, la relazione $\Re =$ "*…ha uno stipendio maggiore o uguale di…*" è una relazione d'ordine, poiché è:

- Riflessiva: Ognuno ha uno stipendio maggiore o uguale di se stesso.
- Antisimmetrica: Se $Antonio$ ha uno stipendio maggiore o uguale di $Andrea$, non vale sempre che $Andrea$ ha uno stipendio maggiore o uguale di $Antonio$. Vale solo quando $Antonio$ e $Andrea$ hanno lo stesso stipendio.

- Transitiva: Se *Antonio* ha uno stipendio maggiore o uguale di *Andrea* che ha uno stipendio maggiore o uguale di *Anna*, è evidente che *Antonio* ha uno stipendio maggiore o uguale di *Anna*.

Se avessimo indicato come relazione $\Re =$ "*…ha uno stipendio maggiore di…*" senza considerare i casi in cui lo stipendio sia uguale, notiamo che la relazione non è riflessiva, infatti, nessuno ha lo stipendio maggiore di se stesso. In questo caso parliamo di relazione **D'ORDINE STRETTO**.

Def. Una relazione è una relazione d'ordine stretto se è contemporaneamente antisimmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Inoltre, se una relazione d'ordine contiene tutti gli elementi dell'insieme di riferimento si dice che è una relazione **D'ORDINE TOTALE**.

Infine, se una relazione d'ordine stretto è anche totale, si indica come relazione **D'ORDINE LINEARE**.

↔

Cenni sulle funzioni

Nel paragrafo 6, il paragrafo delle relazioni, abbiamo introdotto il concetto di corrispondenza. Rivediamolo ed approfondiamo questo concetto.

Dati due insiemi non vuoti, è possibile definire una **regola** che possa creare una **corrispondenza**, cioè delle associazioni, tra gli elementi dei due insiemi. Quindi una legge che associa gli elementi di un primo insieme agli elementi di un secondo insieme.

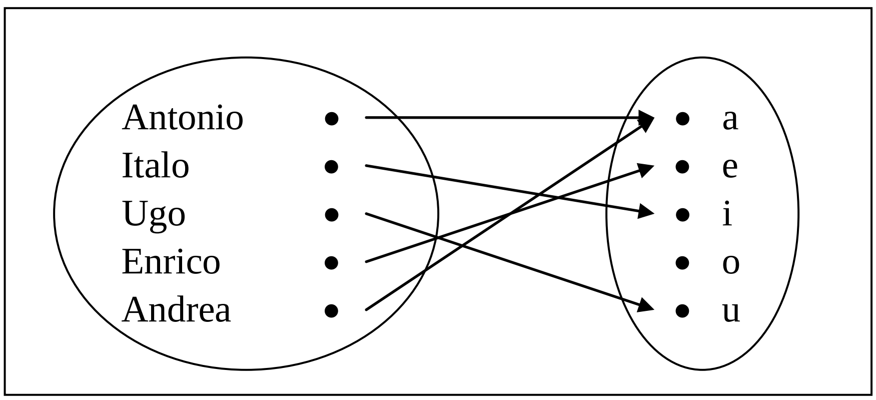
Ad esempio consideriamo i seguenti due insiemi:

$$A = \{antonio, italo, ugo, enrico, andrea\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Creiamo la seguente regola:

"Associare ad ogni nome dell'insieme A ad una lettera dell'insieme B affinché quest'ultima sia la sua lettera iniziale."

Questa è la legge che associa gli elementi dell'insieme A agli elementi dell'insieme B e il risultato che si osserva graficamente attraverso il piano sagittale è il seguente:



In questo esempio, per ogni nome dell'insieme A, possiamo associare una sola lettera dell'insieme B. Questo tipo di associazione viene definita **corrispondenza univoca**. La corrispondenza univoca si ha quando ad ogni elemento del primo insieme posso associare uno e un solo elemento del secondo insieme.

Ad esempio, invece, se il secondo insieme fosse stato un elenco di materie scolastiche e la regola, ossia la legge di associazione la seguente:

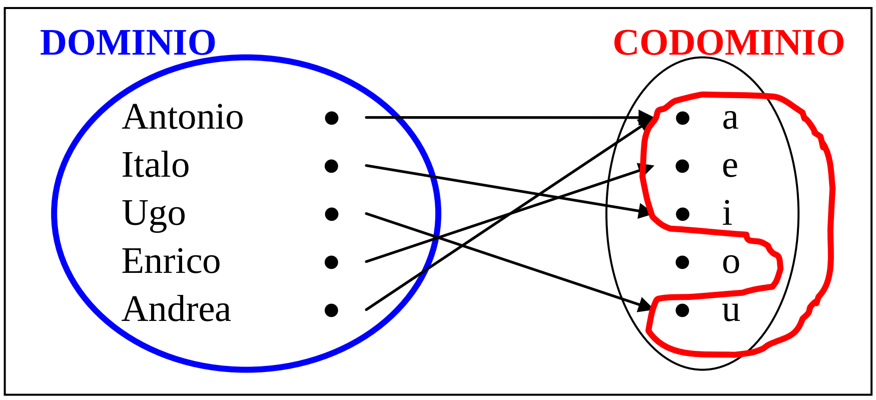
"Associare ad ogni nome dell'insieme A le materie dell'insieme B in cui è stato ottenuto un punteggio maggiore o uguale a sei"

È ovvio che in questo caso ad ogni nome posso associare più di una materia, e quindi la corrispondenza non è univoca.

A questo punto siamo maturi per definire la funzione (o applicazione) tra due insiemi:

Def. Dati due insiemi non vuoti, A e B, la **funzione** (o **applicazione**) tra l'insieme A e l'insieme B che si indica con la scrittura $f: A \to B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B (*corrispondenza univoca*).

L'insieme A viene chiamato **DOMINIO** della funzione, mentre il sottoinsieme di B che contiene tutti gli elementi associati almeno una volta, viene chiamato **CODOMINIO**.



Possiamo scrivere la funzione anche in relazioni agli elementi:

$$\boxed{y = f(x)}$$

Si legge *"y è uguale a effe di x"*, dove x è un elemento di A e y è l'elemento di B associato alla x tramite la legge $f: A \to B$.

$\leftrightarrow$

Insiemi numerici

Alcuni insiemi sono detti numerici, poiché sono costituiti da numeri. Di seguito esamineremo i vari tipi di insiemi numerici, i loro aspetti e le operazioni ben definite in essi. Un'operazione si dice ben definita in un insieme numerico, quando il risultato di tale operazione, tra due elementi qualsiasi, appartiene all'insieme, cioè rimane nell'insieme.

Gli insiemi numerici sono:

- $\mathbb{N}$ Insieme dei numeri **naturali**
- $\mathbb{Z}$ Insieme dei numeri **relativi**
- $\mathbb{Q}$ Insieme dei numeri **razionali**
- $\mathbb{R}$ Insieme dei numeri **reali**
- $\mathbb{C}$ Insieme dei numeri **complessi**

NUMERI NATURALI

Generalmente per numeri naturali intendiamo i **numeri interi positivi** (1,2,3,…,n). Sono quei numeri attraverso i quali i bambini imparano a contare, poiché sono semplici e incontrano le prime esigenze che i bambini nutrono, cioè quella di quantificare e ordinare gli oggetti.

Il simbolo utilizzato per indicare l'insieme dei numeri naturali è $\mathbb{N}$. Normalmente, si assume che l'insieme dei numeri naturali contiene anche lo zero, ma per evitare ogni ambiguità, spesso si usa un apice per rafforzarne il significato. Indichiamo con il simbolo $\mathbb{N}^0$ l'insieme dei numeri naturali che contiene lo zero, mentre, indichiamo con il simbolo $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali che non contiene lo zero.

Per i numeri naturali, le operazioni ben definite sono l'addizione e la moltiplicazione.

Addizione: $a+b=c \qquad \forall a,b \in \mathrm{N} \Rightarrow c \in \mathrm{N}$

Moltiplicazione: $a \cdot b=c \qquad \forall a,b \in \mathrm{N} \Rightarrow c \in \mathrm{N}$

Infatti, se applichiamo l'addizione o la moltiplicazione su qualsiasi coppia di numeri naturali, il risultato sarà un numero naturale.

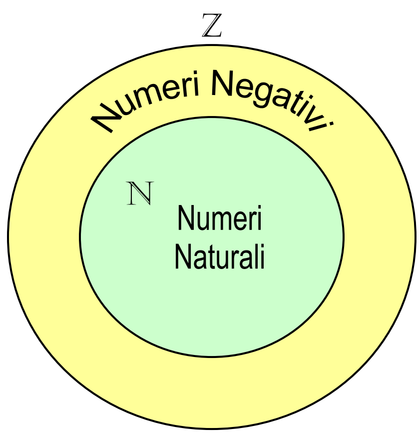
La sottrazione non è un'operazione ben definita. Non sempre se facciamo la sottrazione di due numeri naturali otteniamo un numero naturale, ad esempio $3-5=?$, non ha un risultato numero naturale.

NUMERI RELATIVI

In numeri relativi detti anche **numeri interi**, sono nati per dare un risultato a qualsiasi sottrazione, infatti sono anche definiti come l'insieme dei risultati delle sottrazioni dei numeri naturali.

Il simbolo utilizzato per indicare l'insieme dei numeri relativi è $\mathbb{Z}$, che deriva dal tedesco "*Zahi*" che vuol dire numero. L'insieme è formato dall'unione dei numeri naturali e dei numeri negativi.

Rappresentazione grafica di $\mathbb{Z}$:



Da qui si intuisce facilmente che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Per i numeri relativi, quindi, le operazioni ben definite sono l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione:

Addizione:	$a+b=c$	$\forall a,b \in Z \Rightarrow c \in Z$
Moltiplicazione:	$a \cdot b=c$	$\forall a,b \in Z \Rightarrow c \in Z$
Sottrazione:	$a-b=c$	$\forall a,b \in Z \Rightarrow c \in Z$

Infatti, se applichiamo l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione su qualsiasi coppia di numeri interi, il risultato sarà un numero intero.

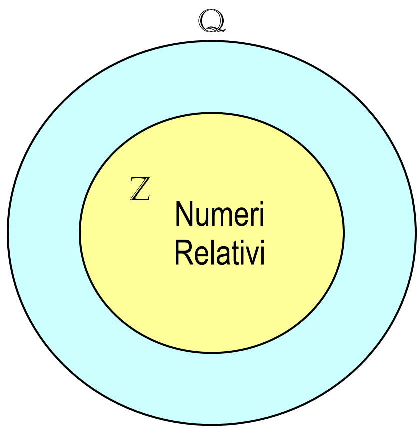
La divisione non è un'operazione ben definita. Non sempre se facciamo la divisione di due numeri interi otteniamo un numero intero, ad esempio $3 \div 2 = ?$, dove il non ha un risultato intero.

NUMERI RAZIONALI

In numeri razionali sono nati per dare un risultato a qualsiasi divisione (eccetto la divisione per 0). Sono conosciuti anche come **numeri frazionari** e si esprimono quindi con una frazione tra due numeri interi $\frac{a}{b}$. Il numero che si trova sopra la linea di frazione, in questo caso la a, viene definito **numeratore**, mentre b **denominatore**. Esiste un limite nell'esistenza della frazione, cioè che il denominatore non può essere uguale a zero $b \neq 0$.

Il simbolo utilizzato per indicare l'insieme dei numeri razionali è $\mathbb{Q}$.

Rappresentazione grafica di $\mathbb{Q}$:



Si intuisce facilmente la relazione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. L'insieme dei numeri razionali contiene in totale: i numeri naturali, i numeri relativi, i numeri decimali finiti, i numeri decimali periodici finiti. Infatti, tutti questi tipi di numeri si possono esprimere attraverso una frazione. Per i numeri naturali e quelli relativi è sottinteso un denominatore uguale a 1, ad esempio: $3 = \frac{3}{1}$. Mentre per rappresentare i numeri decimali come frazioni esistono due regolette molto semplici:

Regola per i numeri decimali finiti non periodici: Si scrivono al numeratore tutte le cifre del numero decimale per intero senza la virgola e al denominatore un **1** con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 1

Esprimere $123{,}4$ come frazione:

Numeratore: numero per intero senza virgola $\boxed{1234}$
Denominatore: **1**, con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola, una sola cifra, il 4, quindi un solo 0. $\boxed{10}$

$$123{,}4 = \frac{1234}{10}$$

Esempio 2

Esprimere $11{,}273$ come frazione:

Numeratore: numero per intero senza virgola $\boxed{11273}$
Denominatore: **1**, con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola, 3 cifre, quindi tre **0**. $\boxed{1000}$

$$123{,}4 = \frac{11273}{1000}$$

Regola per i numeri decimali finiti periodici: Si scrivono al numeratore si sottrae al numero composto da tutte le cifre del numero decimale per intero senza la virgola il numero composto dalle sole cifre non periodiche, mentre al denominatore si scrivono tanti **9** per quante sono le cifre periodiche e tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 1

Esprimere $12{,}3\overline{45}$ come frazione:

Numeratore: numero composto da tutte le cifre 12345, numero composto dalle cifre non periodiche 123, eseguire $12345 - 123$, risultato $\boxed{12222}$.
Denominatore: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 2 cifre; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 1 cifra: $\boxed{990}$

$$12{,}3\overline{45} = \frac{12222}{990}$$

Esempio 2

Esprimere $1{,}35\overline{32}$ come frazione:

Numeratore: numero composto da tutte le cifre 13532, numero composto dalle cifre non periodiche 135, eseguire $13532 - 135$, risultato $\boxed{13397}$.
Denominatore: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 2 cifre; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 2 cifre: $\boxed{9900}$

$$1{,}35\overline{32} = \frac{13397}{9900}$$

Esempio 3

Esprimere $4{,}\overline{3}$ come frazione:

Numeratore: numero composto da tutte le cifre 43, numero composto dalle cifre non periodiche 4, eseguire $43 - 4$, risultato $\boxed{39}$.
Denominatore: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 1 cifra; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 0 cifre: $\boxed{9}$

$$4{,}\overline{3} = \frac{39}{9}$$

Per i numeri relativi, quindi, le operazioni ben definite sono l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione:

Addizione:	$a + b = c$	$\forall a, b \in Q \Rightarrow c \in Q$
Moltiplicazione:	$a \cdot b = c$	$\forall a, b \in Q \Rightarrow c \in Q$
Sottrazione:	$a - b = c$	$\forall a, b \in Q \Rightarrow c \in Q$
Divisione:	$a \div b = c$	$\forall a, b \in Q \Rightarrow c \in Q$

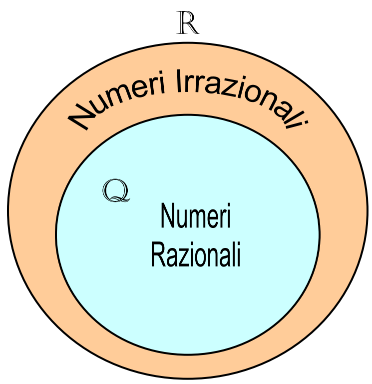
Nel caso dei numeri razionali, l'operazione non ben definita che in alcuni casi non si può eseguire è la radice quadrata, infatti, in alcuni casi il risultato della radice quadrata è un numero decimale infinito, ad esempio $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887240 97.............$.

Per chi vuole approfondire esiste il teorema della non completezza di $\mathbb{Q}$. Questo teorema dimostra infatti che non esiste un numero appartenente a $\mathbb{Q}$ uguale a $\sqrt{2}$

NUMERI REALI

In numeri reali, sono nati per dare un risultato alle radici che hanno come risultato i numeri decimali infiniti, ed è l'unico ***campo archimedeo completo e ordinato***. Il simbolo utilizzato per indicare l'insieme dei numeri reali è $\mathbb{R}$.

Rappresentazione grafica di $\mathbb{R}$:



Si intuisce facilmente la relazione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali è costituito dai numeri razionali unito ai numeri irrazionali (*numeri decimali infiniti risultato di alcune radici*).

Come per i numeri razionali, per i numeri reali, le operazioni ben definite sono l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione:

Addizione:	$a+b=c$	$\forall a,b \in R \Rightarrow c \in R$
Moltiplicazione:	$a \cdot b = c$	$\forall a,b \in R \Rightarrow c \in R$
Sottrazione:	$a-b=c$	$\forall a,b \in R \Rightarrow c \in R$
Divisione:	$a \div b = c$	$\forall a,b \in R \Rightarrow c \in R$

Anche se più completo dei numeri razionali, nell'insieme dei numeri reali la radice quadrata non è ancora ben definita. Infatti, in questo insieme, non valgono solo le radici quadrate con radicando negativo. (*Radicando* = *argomento della radice*). Ad esempio $\sqrt{-3} = ?$.

NUMERI COMPLESSI

A differenza del nome, i numeri complessi non sono difficili. I numeri complessi sono quei numeri costituiti dalla somma di due parti:

- parte reale
- parte immaginaria.

numero complesso = parte reale + parte immaginaria

La parte reale, come dice stesso il nome, è semplicemente un numero reale, mentre la parte immaginaria è un numero che deriva dalla necessità di calcolare la radice quadrata di un numero negativo. La difficoltà nasce dal fatto che il quadrato di qualsiasi numero reale, positivo o negativo che sia da come risultato sempre un numero positivo. Quindi si è ricorso al numero immaginario i. Per questo numero, che non può essere espresso come un numero reale, vale la seguente definizione: $\boxed{i^2 = -1}$

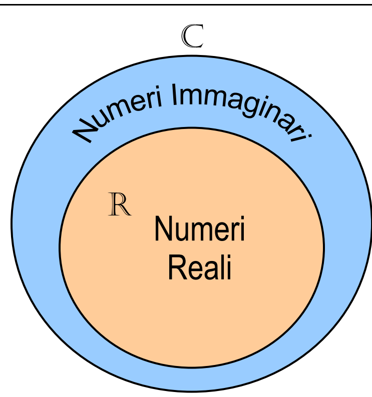
Da qui si comprende bene che è valida anche la relazione $\boxed{i = \sqrt{-1}}$.
L'invenzione del numero immaginario, quindi, ci permette di calcolare le radici quadrate di numeri negativi. Infatti, ogni radice di numero negativo si può trasformare in radice del numero cambiato di segno, il tutto che moltiplica il numero immaginario i.

$$\boxed{\sqrt{-n} = i \cdot \sqrt{n}}$$

Ad esempio: $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)\cdot(+9)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = i\cdot\sqrt{9} = 3i$

Il numero complesso, quindi ha una struttura del tipo: $\boxed{z = a + i \cdot b}$
Dove a e la parte reale e $i \cdot b$ è l immaginaria. I due numeri a e b sono reali.

Rappresentazione grafica di $\mathbb{C}$:



Si intuisce facilmente la relazione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, infatti, se prendiamo tutti i numeri complessi per cui la $b = 0$ otteniamo proprio i numeri reali.

↔

Riepilogo dei simboli

Riepilogo dei simboli utilizzati e altri simboli di uso comune:

Simbolo	Descrizione
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste
$\exists!$	Esiste unico
$<$	Minore di
$>$	Maggiore di
$=$	Uguale a
$\neq$	Diverso da
$\approx$	Uguale circa a
$\leq$	Minore o uguale di
$\geq$	Maggiore o uguale di
$:$	Tale che
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e solo se
$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\subseteq$	Incluso
$\subset$	Incluso in senso stretto
$\supseteq$	Include
$\supset$	Include in senso stretto
$\cup$	Unito
$\cap$	Intersecato
$\backslash$	Differenza
Δ	Differenza simmetrica
$\emptyset$	Insieme vuoto
$\times$	Prodotto cartesiano
$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri relativi
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi

= FINE =