http://www.atuttoportale.it/

Lezioni di matematica a cura dì *Eugenio Amitrano*

Argomento n.3

Introduzione al calcolo letterale: Monomi e polinomi

Una pagina del libro *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hīsāb al-ğabr wa'l-muqābala*

Contenuti:

↔

Introduzione all’algebra elementare

L'algebra è una branca della matematica che studia le strutture algebriche, cioè quegli insiemi di sostegno muniti di operazioni in cui gli operandi sono espressi sia con numeri che con lettere.

Le origini dell’algebra risalgono al noto matematico persiano *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*, e precisamente il termine algebra è preso dal titolo del suo libro *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hīsāb* ***al-ğabr*** *wa’l-muqābala* in cui tratta la risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado.

Il più semplice tipo di algebra è appunto l’algebra elementare, che rappresenta un’evoluzione ai principi base dell'aritmetica, dove oltre ai numeri e le quattro operazioni aritmetiche, compaiono anche simboli.

In tutte le discipline scientifiche l’algebra è molto utilizzata, in quanto consente la formulazione delle relazioni funzionali. Ad esempio in fisica classica, la maggior parte delle relazioni che descrivono i fenomeni naturali sono espresse mediante formulazioni algebriche.

In questo argomento, tratteremo in particolare le proprietà e i metodi di risoluzione delle operazioni in cui compaiono operandi costituiti da numeri e lettere, al fine di poter risolvere espressioni letterali.

↔

Proprietà delle potenze

Prima di procedere è utile introdurre il concetto di variabile. Il termine **variabile** indica un oggetto, una lettera o un qualsiasi simbolo che può assumere valori diversi, appartenenti ad un certo insieme, in momenti diversi. Ad esempio, se consideriamo la formula per calcolare l'area di un rettangolo, $A = b \times h$, dove A è l'area del rettangolo, b la base ed h l'altezza, è facile intuire che le variabili b e h assumeranno valori diversi per rettangoli diversi.

Di seguito un breve schema che illustra le proprietà delle potenze in cui sono presenti le lettere, le quali possono essere sostituite con qualsiasi numero.

<u>Condizione importante!</u>
Se in un'espressione letterale, una lettera compare più volte, in ogni momento a lettera uguale corrisponde numero uguale.

Ricordiamo che la potenza è l'operazione in cui si moltiplicano più volte numeri uguali:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad volte}}$$

E di seguito vediamo le principali proprietà delle potenze:

- **<u>Potenza di un prodotto:</u>**

La potenza di un prodotto è il prodotto delle singole potenze:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \quad (2.1)$$

- **<u>Potenza di una frazione:</u>**

La potenza di una frazione è la frazione delle singole potenze:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad (2.2)$$

- **Potenza ad esponente unitario:**

Ogni potenza ad esponente unitario corrisponde alla sua stessa base:

$$\boxed{a^1 = a} \quad (2.3)$$

In pratica, il numero 1 è l'elemento neutro della potenza.

- **Potenza ad esponente nullo:**

Ogni potenza con base diversa da zero, ad esponente nullo corrisponde ad 1:

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0} \quad (2.4)$$

- **Potenza ad esponente negativo:**

Ogni potenza con esponente negativo corrisponde al reciproco della potenza ad esponente positivo:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (2.5a) \qquad \boxed{\frac{1}{b^{-n}} = b^n} \quad (2.5b) \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n} \quad (2.5c)$$

Dalla definizione di potenza e da queste prime cinque proprietà, si ricavano tutte le proprietà descritte in seguito.

- **Prodotto di potenze aventi la stessa base:**

Il prodotto di potenze aventi la stessa base, è una potenza che per base ha la stessa base e per esponente la somma degli esponenti degli operandi:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \quad (2.6)$$

Esempio: $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

Dimostrazione:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad volte} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \quad volte} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \quad volte} = a^{n+m}$$

- **<u>Frazione o divisione di potenze aventi la stessa base:</u>**

La divisione, o frazione di potenze aventi la stessa base, è una potenza che per base ha la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti degli operandi.

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = \left(a^n : a^m\right) = a^{n-m}} \quad (2.7)$$

Esempio: $\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$

<u>Dimostrazione:</u>

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

- **<u>Potenza di una potenza:</u>**

La divisione, o frazione di potenze aventi la stessa base, è una potenza che per base ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti degli operandi.

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}} \quad (2.8)$$

Esempio: $\left(a^2\right)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$

<u>Dimostrazione:</u>

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \quad volte} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad volte} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad volte}}_{m \quad volte} \cdot \ldots = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots}_{n \cdot m \quad volte} = a^{n \cdot m}$$

$\leftrightarrow$

Sommatoria, produttoria e fattoriale

Un altro richiamo importante è quello del concetto di **funzione** che è stato descritto nell'argomento-1 di quest'opera.

Def. Dati due insiemi non vuoti, A e B, la **funzione** (o **applicazione**) tra l'insieme A e l'insieme B che si indica con la scrittura $f: A \to B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B (*corrispondenza univoca*).

Per la spiegazione, approfondire l'argomento attraverso il paragrafo "**Cenni di Funzioni**" dell'argomento-1.

In sostanza, a partire da un insieme A, attraverso una legge $f: A \to B$, otteniamo come risultato un insieme C (sottoinsieme di B) contente gli elementi di B che sono associati agli elementi dell'insieme A.

Dato un insieme A, costituito da una sequenza di numeri che va da 1 a n, con il valore di n noto, e data una legge $f: A \to B$, possiamo definire:

- **Sommatoria**, la somma di tutti gli elementi dell'insieme C**;**
- **Produttoria**, il prodotto di tutti gli elementi dell'insieme C**.**

Generalmente, nella sommatoria e nella produttoria, la variabile indipendente si indica con la lettera i. Il simbolo utilizzato per indicare la sommatoria è $\sum$ (*sigma maiuscolo*), e la sua operazione si scrive $\sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Attraverso questa scrittura, possiamo dire che l'insieme A è costituito dagli elementi $\{1,2,3,...,n\}$, mentre l'insieme C, per la legge $f: A \to B$, è costituito dagli elementi associati $\{f(1), f(2),... f(n)\}$. Il risultato della sommatoria è un numero dato dalla somma degli elementi dell'insieme C. Pertanto possiamo scrivere:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + ... + f(n)} \quad (3.1)$$

Ad esempio proviamo a calcolare il risultato della sommatoria $\sum_{i=1}^{5} i^2$:

L'insieme A è costituito dagli elementi $\{1,2,3,.4,5\}$, mentre l'insieme C, per la legge i^2, è costituito dai quadrati degli elementi di A, per cui $C = \{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2\}$.

Quindi $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

Non necessariamente la sequenza deve partire da 1, basta indicare sotto al simbolo di sommatoria, invece di $i = 1$, ad esempio la scrittura $i = 2$ se si vuole partire da 2 oppure $i = 3$ se si vuole partire da 3 e così via.

Altro esempio, proviamo a calcolare $\sum_{i=2}^{4} (3 \cdot i - 1)$

L'insieme A è costituito dagli elementi $\{2,3,4\}$, mentre l'insieme C, per la legge $(3 \cdot i - 1)$, è costituito degli elementi di A moltiplicati per 3 e sottratti di una unità, per cui $C = \{5,8,11\}$, poiché $5 = 2 \cdot 3 - 1$, $8 = 3 \cdot 3 - 1$ e $11 = 4 \cdot 3 - 1$.

Quindi $\sum_{i=2}^{4} (3 \cdot i - 1) = 5 + 8 + 11 = 24$.

Il simbolo utilizzato per indicare la produttoria è $\prod$ (*pi maiuscolo*), e la sua operazione si scrive $\prod_{i=1}^{n} f(i)$. Il procedimento è analogo a quello della sommatoria, cambia il calcolo del risultato, che invece della somma è il prodotto degli elementi dell'insieme C.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} f(i) = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)} \quad (3.2)$$

Ogni ulteriore spiegazione sarebbe superflua, pertanto passiamo direttamente agli esempi.

Esempio, proviamo a calcolare $\prod_{i=2}^{4} (2 \cdot i + 1)$

L'insieme A è costituito dagli elementi $\{2,3,4\}$, mentre l'insieme C, è costituito degli elementi di A moltiplicati per 2 e sommati di una unità, per cui $C = \{5,7,9\}$.

Quindi $\prod_{i=2}^{4} (2 \cdot i + 1) = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$.

Il **fattoriale** di un numero n, si scrive $n!$ e si legge "**n fattoriale**" o "**fattoriale di n**", corrisponde al prodotto dei numeri che vanno da 1 a n.

$$\boxed{n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n} \quad (3.3)$$

Ad esempio $4! = \prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Di seguito riportiamo il fattoriale dei primi 10 numeri naturali:

$$1! = \prod_{i=1}^{1} i = 1$$

$$2! = \prod_{i=1}^{2} i = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = \prod_{i=1}^{3} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = \prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = \prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = \prod_{i=1}^{6} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$7! = \prod_{i=1}^{7} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

$$8! = \prod_{i=1}^{8} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

$$9! = \prod_{i=1}^{9} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$$

$$10! = \prod_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

Da questo elenco è facile notare che il valore del fattoriale cresce molto rapidamente.

Una proprietà fondamentale è la sua scomposizione:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1)!} \quad (3.4)$$

Cioè il fattoriale di un numero corrisponde al fattoriale del precedente per il numero stesso, ad esempio $4!$ corrisponde al fattoriale di 3 moltiplicato per 4. Possiamo scrivere quindi $4! = 4 \cdot 3!$, infatti $4! = \prod_{i=1}^{4} i = 24$ e $4 \cdot 3! = 4 \cdot \prod_{i=1}^{3} i = 4 \cdot 6 = 24$.

Grazie a questa proprietà, siamo anche in grado di stabilire che il fattoriale di 0 è uguale a 1.

$$\boxed{0! = 1} \quad (3.5)$$

<u>Dimostrazione:</u>

Per la proprietà anzidetta $1! = 1 \cdot 0! = 0!$. Essendo $1! = 0!$ e $1! = 1$, per la proprietà transitiva anche $0! = 1$.

↔

Coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale**, che riprenderemo nel calcolo combinatorio nelle prossime lezioni, è un'importante applicazione del fattoriale, in grado di calcolare le combinazioni semplici senza ripetizione.

Esempi di combinazione semplice senza ripetizione li ritroviamo spesso nella nostra vita quotidiana, ad esempio quando calcoliamo le probabilità di vincere al lotto.

Con il coefficiente binomiale possiamo calcolare ad esempio quanti terni ci sono in cinque numeri, oppure quante sono le combinazioni del superenalotto, o ancora quante coppie posso formare con un certo numero di persone e così via.

Come abbiamo detto prima, il coefficiente binomiale è un'applicazione del fattoriale, ci sono due variabili che indicheremo con n e k, si scrive $\binom{n}{k}$ ed è dato dalla seguente formula:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} \quad (4.1)$$

Esempio 1: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = \frac{120}{12} = 10$

Esempio 2: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = \frac{720}{48} = 15$

In pratica, la scrittura $\binom{n}{k}$, calcola quante combinazioni di k numeri (senza ripetizioni) si formano utilizzando n numeri.

Per introdurci nel cuore del concetto, partiamo con un esempio molto semplice. Proviamo a rispondere a questa domanda: "*Quante coppie (due persone) si possono fare con 3 persone?*".

Indichiamo le tre persone con A, B e C. Le possibili coppie sono AB, AC e BC, quindi le coppie sono 3. Confrontiamo adesso questo risultato con quello calcolato attraverso il coefficiente binomiale.

In questo caso n vale 3 poiché le persone sono 3, mentre k vale 2 poiché le coppie sono formate da 2 persone.

$$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{6}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$$

Il risultato è 3, proprio il numero delle possibili coppie.

Procediamo con qualcosa di leggermente più complicato. Ora la domanda è "*Quanti terni si possono fare con 5 numeri?*"

In questo caso n vale 5 e k vale 3, poiché vogliamo calcolare le combinazioni di 3 numeri (senza ripetizioni) su 5.

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{120}{6\cdot 2}=\frac{120}{12}=10$$

Abbiamo così calcolato che su 5 numeri ci sono ben 10 terni.

Infine, proviamo a calcolare le combinazioni del superenalotto. In pratica, dobbiamo calcolare quante sestine (combinazioni di 6 numeri) si possono fare con 90 numeri. In questo caso n vale 90 e k vale 6, poiché vogliamo calcolare le combinazioni di 6 numeri (senza ripetizioni) su 90.

$$\binom{90}{6}=\frac{90!}{6!\cdot(90-6)!}=\frac{90!}{6!\cdot 84!}$$

Facciamo qualche riflessione sul calcolo. Il fattoriale di 90 è un numero composto da 139 cifre, e questo rende il calcolo molto complesso. Possiamo renderlo molto più semplice utilizzano le proprietà del fattoriale.

Sfruttando la proprietà del fattoriale **(3.4)** possiamo scrivere:

$$90!=90\cdot 89!=90\cdot 89\cdot 88!=\ldots=90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84!$$

Sostituiamo il fattoriale di 90 nel calcolo delle combinazioni:

$$\frac{90!}{6!\cdot 84!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84!}{6!\cdot 84!}$$

A questo punto, possiamo semplificare il fattoriale di 84 e calcolare le combinazioni con numeri più gestibili.

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{6!} = \frac{448.282.533.600}{720} = 622.614.630$$

.... Forse questo risultato ci suggerisce qualcosa ....

Il nome "**coefficiente binomiale**" nasce dal calcolo della potenza di binomio (binomio di Newton) che vedremo più avanti in questa lezione, nel paragrafo delle operazioni con i polinomi.

↔

Monomi e sue operazioni

Un **monomio** è un'espressione algebrica che esprime una quantità, ed è costituito da tre parti:

1. Un segno (+, –);
2. Una parte numerica (***coefficiente***);
3. Una parte letterale.

Un esempio di monomio è $-2ab^2$, dove, in questo caso il segno è "–", il coefficiente (parte numerica) è il "2" e la parte letterale è "ab^2".

Vale la pena spendere qualche parola su tutto ciò che può essere sottinteso.

Quando non è specificato il segno, si sottintende che tale segno sia positivo, ad esempio per il monomio $3ac$ è sottinteso che si tratta di $+3ac$.

Quando non è specificata la parte numerica, si sottintende che tale coefficiente sia il numero 1. Ad esempio per il monomio $-a^2c$ è sottinteso che si tratta di $-1a^2c$. Questo perché il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione, ed essendo il monomio sostanzialmente una moltiplicazione tra le parti, è possibile applicare questa proprietà. Infatti, se $2=1\cdot 2$ per tale proprietà, vale anche l'uguaglianza $a=1\cdot a$.

Quando ad una lettera non è specificato l'esponente, per la proprietà (2.3) delle potenze, si sottintende che tale esponente sia il numero 1. Ad esempio per il monomio $+2a^2c$ è sottinteso che si tratta di $+2a^2c^1$.

Quando in una parte letterale non è specificata una lettera, possiamo eventualmente sottintendere che questa lettera ci sia con esponente nullo. Infatti, combinando la proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione con la proprietà **(2.4)** delle potenze, possiamo sottintendere la presenza di altre lettere nella parte letterale.

Ad esempio consideriamo il monomio $-2a^2cd$.

- Per la proprietà dell'elemento neutro possiamo scrivere $-2a^2cd=-2a^2\cdot 1\cdot cd$.
- Per la proprietà **(2.4)** delle potenze possiamo scrivere ad esempio $1=b^0$.

Infine, per queste 2 proprietà $-2a^2cd=-2a^2\cdot 1\cdot cd=-2a^2b^0cd$.

Inoltre, un monomio può essere considerato tale anche se mancante della parte letterale.

Passiamo adesso alle definizioni più importanti:

- **Monomi simili:**

Due monomi si dicono simili quando hanno la stessa parte letterale. Ad esempio, i monomi $-b^2c$ e $3b^2c$ sono simili, infatti, hanno la parte letterale (b^2c) in comune.

- **Grado di un monomio:**

Dobbiamo distinguere due tipi di grado:

- Il grado complessivo;
- Il grado rispetto ad una lettera.

Il grado complessivo è la somma di tutti chi esponenti delle lettere presenti nella parte letterale, mentre il grado rispetto ad una lettera corrisponde all'esponente della lettera a cui si fa riferimento.

Esempio 1: $-2a^2cd$
Grado complessivo: $2+1+1=4$
Grado rispetto alla a: 2
Grado rispetto alla c: 1
Grado rispetto alla d: 1

Esempio 2: -3
Grado complessivo: 0

Vediamo adesso le operazioni.

- **Addizione e sottrazione**

L'addizione o la sottrazione algebrica fra monomi può avvenire **solo quando gli addendi sono tra loro simili**, cioè che posseggono la stessa parte letterale. La somma o la differenza algebrica è anch'essa un monomio che ha la stessa parte letterale dei suoi operandi e come coefficiente la somma o la differenza algebrica dei coefficienti degli operandi. Ad esempio $3a^2b-5a^2b$.

Parte letterale: a^2b
Operazione algebrica: $3-5=-2$

Quindi $3a^2b-5a^2b=-2a^2b$

Per l'addizione e la sottrazione algebrica fra monomi valgono tutte le proprietà dell'addizione e della sottrazione aritmetica descritte nell'argomento-2.

- **Moltiplicazione**

Il prodotto tra due o più monomi è quel monomio che ha:

- Per segno il prodotto dei segni;
- Per coefficiente il prodotto dei coefficienti;
- La parte letterale si costruisce seguendo la regola del prodotto di potenze (**2.6**).

Ad esempio, eseguiamo la seguente moltiplicazione: $\left(-3ab^2c\right)\cdot\left(-2a^3c^2\right)$

- Segno: $(-)\cdot(-)=+$
- Coefficiente: $(2)\cdot(3)=6$
- Lettere presenti: a,b,c
- Esponente di a: $1+3=4$
- Esponente di b: $2+0=2$
- Esponente di c: $1+2=3$

Quindi, $\left(-3ab^2c\right)\cdot\left(-2a^3c^2\right)=6a^4b^2c^3$

- **Divisione**

Il quoziente tra due monomi è quel monomio che ha:

- Per segno il prodotto dei segni;
- Per coefficiente il quoziente dei coefficienti;
- La parte letterale si costruisce seguendo la regola delle frazioni di potenze **(2.7)**.

Ad esempio, eseguiamo la seguente divisione: $\dfrac{\left(-6a^3b^4c^5\right)}{\left(-2a^3c^2\right)}$

- Segno: $(-)\cdot(-)=+$
- Coefficiente: $(6)\cdot(2)=3$
- Esponente di a: $3-3=0$
- Esponente di b: $4-0=4$
- Esponente di c: $5-2=3$

Quindi, $\dfrac{\left(-6a^3b^4c^5\right)}{\left(-2a^3c^2\right)}=+3b^4c^3$

➢ Elevamento a potenza

L’elevamento a potenza di un monomio produce come risultato quel monomio che ha:

- Per segno la potenza del segno;
- Per coefficiente la potenza del coefficiente;
- La parte letterale si costruisce seguendo la regola della potenza di potenza (**2.8**).

Per la potenza del segno, ricordiamo che il segno positivo rimane positivo per qualsiasi potenza, mentre il segno negativo rimane negativo per le potenze dispari e diventa positivo per potenze pari.

Regola della potenza del segno: $\begin{cases} (+)^n = + \\ (-)^n = \begin{cases} + & \forall n..pari \\ - & \forall n..disp. \end{cases} \end{cases}$

Ad esempio, eseguiamo la seguente potenza: $\left(-2ab^3c^2\right)^3$

- Segno: $(-)^3 = -$
- Coefficiente: $2^3 = 8$
- Esponente di a: $1 \cdot 3 = 3$
- Esponente di b: $3 \cdot 3 = 9$
- Esponente di c: $2 \cdot 3 = 6$

Quindi, $\left(-2ab^3c^2\right)^3 = -8a^3b^9c^6$

➢ M.C.D. e m.c.m.

Il massimo comune divisore (**M.C.D.**) e il minimo comune multiplo (**m.c.m.**) di due o più monomi è un monomio che va calcolato come segue:

Per la parte numerica, il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo seguono le regole descritte nell’argomento-2.

Per la parte letterale invece seguiamo le due semplici regole seguenti:

1) La parte letterale del M.C.D. è formata dalle lettere **solo comuni**, prese una sola volta con il **minimo esponente**.

2) La parte letterale del m.c.m. è formata dalle lettere **comuni e non comuni** prese una sola volta con il **massimo esponente**.

Ad esempio, calcoliamo in M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti monomi:

$9a^4bc^3$; $6a^2c^4d^3$; $12a^3bc^5d^3$;

M.C.D.

- Parte numerica: $M.C.D.(9,6,12) = 3$
- Lettere comuni: a, c
- Minimo esponente di a: 2 (2° monomio)
- Minimo esponente di c: 3 (1° monomio)
- Risultato: $3a^2c^3$

m.c.m.

- Parte numerica: $m.c.m.(9,6,12) = 36$
- Lettere comuni e non: a, b, c, d
- Massimo esponente di a: 4 (1° monomio)
- Massimo esponente di b: 1 (1° e 3° monomio)
- Massimo esponente di c: 5 (3° monomio)
- Massimo esponente di d: 3 (2° e 3° monomio)
- Risultato: $36a^4bc^5d^3$

↔

Polinomi e sue operazioni

Un **polinomio**, come il monomio è un'espressione algebrica, rappresentato dalla somma algebrica di uno o più monomi. Ad esempio $2a+3b-4c$. Ogni monomio che costituisce un polinomio è chiamato **termine**.

Un polinomio costituito da due termini è chiamato **binomio**, ad esempio $3a^2-5b$;
Un polinomio costituito da tre termini è chiamato **trinomio**, ad esempio x^2-2x-3;
Il monomio è un polinomio formato da un solo termine, generalmente però si preferisce associare la parola polinomio ad almeno due termini.

Come per il monomio, il **grado di un polinomio** può essere complessivo o rispetto ad una lettera. Il grado complessivo corrisponde al grado del termine maggiore. Mentre il grado rispetto ad una lettera corrisponde al grado massimo posseduto dalla lettera di riferimento.

Esempio: $3b^2c^3d^4-2a^2cd$
Grado 1° monomio: $2+3+4=9$ *grado maggiore!*
Grado 2° monomio: $2+1+1=4$
Grado polinomio: 9 (= *grado 1° monomio*)
Grado rispetto alla a: 2 *(2° monomio)*
Grado rispetto alla b: 2 *(1° monomio)*
Grado rispetto alla c: 3 *(1° monomio)*
Grado rispetto alla d: 4 *(1° monomio)*

Ora vediamo un po' di definizioni.

Un polinomio che ha tutti i termini dello stesso grado si dice **omogeneo**, ad esempio a^2+b^2+cd ha tutti i monomi di 2° grado.

Un polinomio si dice ridotto in **forma normale**, quando tutti i monomi simili sono stati sommati e sono stati eliminati i monomi nulli.

Ad esempio il polinomio $3a+3b-4c-2b+2c-b-a$ non è ridotto a forma normale, per farlo, dobbiamo sommare tutti i monomi simili. Ricerchiamo i monomi simili e li contrassegniamo: $\underline{3a}+\underline{\underline{3b}}-\underline{\underline{\underline{4c}}}-\underline{\underline{2b}}+\underline{\underline{\underline{2c}}}-\underline{\underline{b}}-\underline{a}$

$$\begin{cases} 3a-a=2a \\ 3b-2b-b=0 \\ -4c+2c=-2c \end{cases}$$

Dopo questa operazione otteniamo $2a-2c$, polinomio ridotto in forma normale, poiché sono stati sommati ed eliminati tutti i termini simili e nulli.

Una volta ridotto in forma normale, se esiste il monomio di grado 0, questo sarà il **termine noto** del polinomio. Ad esempio $2a-2c$ non ha termine noto, mentre nel polinomio $3a^2+2a-3$ il termine noto è -3.

Un polinomio si dice **ordinato** rispetto ad una lettera se esiste una relazione d'ordine (decrescente) tra le potenze di questa lettera a partire dal primo termine con il massimo grado fino all'ultimo con il minimo grado.

Ad esempio, verifichiamo l'ordine rispetto alla lettera a dei seguenti due polinomi:

1. $a^3+2a^2+3ab+4b^2$	Potenze di a:	3, 2, 1, 0	Ordinato!
2. $a^2b+3a^3b^2+4ab^3$	Potenze di a:	2, 3, 1	Non ordinato!

Un polinomio si dice **completo**, se è presente una sola variabile, e sono presenti tutti i gradi da 0 ad n di questa variabile, dove n è il grado nel polinomio. Ad esempio $2a^3+3a^2+4a+5$ è un polinomio completo, infatti, esiste solo la variabile a, il grado del polinomio è 3 e sono presenti tutti i gradi da 0 a 3 per la lettera a.

Di seguito sono illustrate le principali operazioni con i polinomi.

- **<u>Addizione</u>**

La somma tra due o più polinomi è quel polinomio formato dai termini di tutti i polinomi.

$$\boxed{(polinomio1)+(polinomio2)=polinomio1+polinomio2}$$

Molto spesso capita, che il polinomio risultante **non** è ridotto in forma normale, e pertanto vanno sommati tutti i monomi simili.

Esempio:

$$(2a-b+3c)+(b+c-3d)=2a-\cancel{\underline{b}}+\underline{\underline{3c}}+\cancel{\underline{b}}+\underline{\underline{c}}-3d=2a+4c-3d$$

- **<u>Sottrazione</u>**

La differenza tra due polinomi è quel polinomio formato dai termini del primo polinomio e del secondo polinomio con il segno cambiato.

$$\boxed{(polinomio1)+(polinomio2)=polinomio1+\left\langle\begin{array}{c} polinomio2 \\ con..segno..opposto \end{array}\right\rangle}$$

Come per l’addizione, anche nella sottrazione capita che il polinomio risultante non è ridotto in forma normale.

Esempio:
$$(2a-b+3c)-(b+2c-2d)=2a-\underline{b}+\underline{\underline{3c}}-\underline{b}-\underline{\underline{2c}}+2d=2a-2b+c+2d$$

- **<u>Moltiplicazione di un monomio per un polinomio</u>**

Il prodotto di un monomio per un polinomio è un altro polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando il monomio per tutti i termini del polinomio.

$$\boxed{x\cdot(a+b+c+...)=ax+bx+cx+...}$$

Esempio:
$$(abc)\cdot(2a+3b-4c)=(abc)\cdot(2a)+(abc)\cdot(3b)+(abc)\cdot(-4c)=2a^2bc+3ab^2c-4abc^2$$

- **<u>Moltiplicazione di due polinomi</u>**

Il prodotto di un polinomio per un polinomio è un altro polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ogni termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo.

$$\boxed{(x+y+...)\cdot(a+b+c+...)=ax+bx+cx+...+ay+by+cy+...}$$

Esempio:
$$(a+2b-3c)\cdot(2a-3b+c)=$$
$$=(a)\cdot(2a)+(a)\cdot(-3b)+(a)\cdot(c)+(2b)\cdot(2a)+(2b)\cdot(-3b)+(2b)\cdot(c)+(-3c)\cdot(2a)+(-3c)\cdot(-3b)+(-3c)\cdot(c)=$$
$$=2a^2\underset{\wedge\wedge/}{-3ab}\underset{xxx}{+ac}\underset{\wedge\wedge/}{+2ab}-6b^2\underset{oooo}{+2bc}\underset{xxx}{-6ac}\underset{oooo}{+9bc}-3c^2=$$
$$=2a^2-6b^2-3c^2-ab-5ac+11bc$$

➢ Divisione di un polinomio per un monomio

Un polinomio è divisibile per un monomio (*non nullo*), se esiste un altro polinomio che moltiplicato per il monomio si ottiene il primo polinomio. Inoltre, è fondamentale che ogni termine del polinomio sia divisibile per il monomio.

I termini del risultato (del secondo polinomio), si ottengono dividendo ogni termine del primo polinomio per il monomio.

$$\boxed{(a+b+c+...):x=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+...}$$

Esempio:

$$\left(2a^2bc-6ab^2c-4abc^2\right):(-2abc)=\frac{2a^2bc}{-2abc}+\frac{-6ab^2c}{-2abc}+\frac{-4abc^2}{-2abc}=-a+3b+2c$$

➢ Divisione di polinomi

Condizione necessaria per l'esecuzione della divisione e che i polinomi siano ordinati. Inoltre, per semplicità consideriamo solo i polinomi con una variabile. Convenzionalmente, indichiamo la variabile con la lettera x, il primo polinomio (*dividendo*) con la scrittura $A(x)$ e il secondo (*divisore*) con la scrittura $B(x)$.

Richiamiamo un'importante regola delle divisioni:
Indichiamo con A il dividendo, con B il divisore, con Q il quoziente di $\frac{A}{B}$ e con R il resto di tale divisione, possiamo scrivere che $B\cdot Q+R=A$. Ad esempio se il dividendo $A=23$ e il divisore è $B=5$, otteniamo $Q=A:B=23:5=4$ con resto $R=3$, possiamo verificare che $23=5\cdot 4+3$. La stessa regola vale per i polinomi.

L'obbiettivo della divisione di polinomi è quella di ricavare il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$, tali che $B(x)\cdot Q(x)+R(x)=A(x)$

Poiché nella divisione il resto deve essere sempre inferiore al divisore, nella divisione di polinomi, il polinomio resto deve essere di grado inferiore al polinomio divisore.

$$gradoR(x)<gradoB(x)$$

Procedimento:

Prima di iniziare:

1. Nel caso in cui i polinomi non fossero ordinati, ordinare i due polinomi;
2. Nel caso in cui i polinomi non siano completi, aggiungere uno zero nella posizione dei termini mancanti;

Divisione:

3. Dividere il primo termine di $A(x)$ con il primo termine di $B(x)$, e otteniamo il primo termine di $Q(x)$.
4. Moltiplicare il primo termine di $Q(x)$ per tutti i termini di $B(x)$ e sottrarre il risultato ad $A(x)$. Quello che si ottiene si chiama resto parziale.
5. Si ripete dal punto (3) utilizzando invece di $A(x)$ il resto parziale ottenuto al punto (4), fino a quando il resto parziale ha grado inferiore a $B(x)$.

L'ultimo resto parziale sarà il resto della divisione $R(x)$.

Esempio: $(4x+2x^4+8x^2+6):(2x+2)$

Punto 1, ordinare i polinomi:

$$2x^4+8x^2+4x+6 \mid \underline{2x+2}$$

Punto 2, rimpiazzare i termini mancanti con uno 0:

$$2x^4+0+8x^2+4x+6 \mid \underline{2x+2}$$

Punto 3, dividere il primo termine di $A(x)$ con il primo termine di $B(x)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+0+8x^2+4x+6 & \underline{2x+2} \\ & \quad x^3 \end{array}$$

Punto 4, moltiplicare il primo termine di $Q(x)$ per tutti i termini di $B(x)$ e sottrarre il risultato ad $A(x)$

$$
\begin{array}{lllll|l}
2x^4 & +0 & +8x^2 & +4x & +6 & \underline{2x+2} \\
-2x^4 & -2x^3 & & & & x^3 \\
\hline
// & -2x^3 & +8x^2 & +4x & +6 &
\end{array}
$$

Punto 5, si ripete dal punto (3) utilizzando invece di $A(x)$ il resto parziale ottenuto al punto (4), fino a quando il resto parziale ha grado inferiore a $B(x)$

$$
\begin{array}{llllll|l}
2x^4 & +0 & +8x^2 & +4x & -6 & & \underline{2x+2} \\
-2x^4 & -2x^3 & & & & & x^3-x^2+5x-3 \\
\hline
// & -2x^3 & +8x^2 & +4x & -6 & & \\
 & +2x^3 & +2x^2 & & & & \\
\hline
 & // & +10x^2 & +4x & -6 & & \\
 & & -10x^2 & -10x & & & \\
\hline
 & & // & -6x & -6 & & \\
 & & & +6x & +6 & & \\
\hline
 & & & & // & &
\end{array}
$$

$Q(x)=x^3-x^2+5x-3$
$R(x)=0$

In questo caso, $R(x)=0$, vuol dire che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Facciamo la prova $B(x)\cdot Q(x)+R(x)=A(x)$:

$(2x+2)(x^3-x^2+5x-3)+0=$

$=2x^4-\cancel{2x^3}+\underline{10x^2}-\underline{\underline{6x}}+\cancel{2x^3}-\underline{2x^2}+\underline{\underline{10x}}-6=$

$=2x^4+8x^2+4x-6$ Proprio il dividendo $A(x)$.

- **<u>Divisione mediante la regola di Ruffini</u>**

La divisione mediante la regola di Ruffini può essere applicata solo se il divisore è del tipo $(x-\alpha)$, dove α rappresenta il termine noto, non solo del divisore, ma il termine noto dell'intera divisione.

Divisione: $(ax^n+bx^{n-1}+...+px+q):(x-\alpha)$

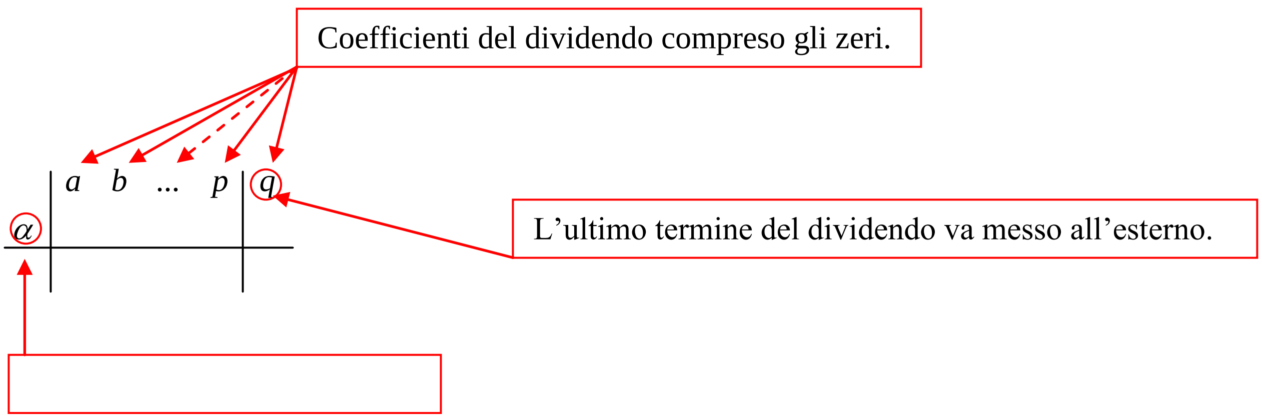
Procedimento:

<u>Prima di iniziare:</u>

1. Nel caso in cui i polinomi non fossero ordinati, ordinare i due polinomi;
2. Nel caso in cui i polinomi non siano completi, aggiungere uno zero nella posizione dei termini mancanti;

<u>Divisione:</u>

3. Eseguire la seguente costruzione:



4. Abbassare il primo coefficiente;

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a & b & \dots & p & q \\ \alpha & & & & & \\ \hline & a & & & & \end{array}$$

5. Si moltiplica per il termine noto e va sommato al secondo coefficiente;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & a & b & \dots \quad p & q \\ \alpha & & (a \cdot \alpha) & & \\ \hline & a & (b + a \cdot \alpha) & & \end{array}$$

6. Si moltiplica il valore ricavato per il termine noto e sommato al coefficiente successivo;

7. Ripetere l'operazione fino all'ultimo termine.

Indicando con b', …, p' i risultati delle somme, alla fine si ottiene:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a & b & \dots & p & q \\ \alpha & & & & & \\ \hline & a & b' & \dots & p' & R \end{array}$$

I numeri che vanno da a fino a p' sono i coefficienti del risultato ed R invece è il resto della divisione.

Esempio: $\left(-4x+2x^4-8x^2+6\right):\left(x-2\right)$
Il termine noto della divisione è $\alpha = 2$

Punto 1, ordinare i polinomi:

$$\left(2x^4-8x^2-4x+6\right):\left(x-2\right)$$

Punto 2, rimpiazzare i termini mancanti con uno 0:

$$\left(2x^4+0-8x^2-4x+6\right):\left(x-2\right)$$

Punto 3, eseguiamo la costruzione:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Punto 4, abbassiamo il primo coefficiente:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

Punto 5, moltiplichiamo per il termine noto e sommiamo al coefficiente successivo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 2 & & +4 & & & \\ \hline & 2 & 4 & & & \end{array}$$

Punto 6-7, proseguiamo fino all'ultimo coefficiente:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 2 & & +4 & +8 & 0 & -8 \\ \hline & 2 & 4 & 0 & -4 & -2 \end{array}$$

Alla fine, $\left(2x^4+0-8x^2-4x+6\right):\left(x-2\right)=2x^3+4x^2-4$ e il resto è $R=-2$.

Facciamo la prova $B(x)\cdot Q(x)+R(x)=A(x)$:

$$\left(2x^3+4x^2-4\right)\cdot\left(x-2\right)-2=2x^4-\cancel{4x^3}+\cancel{4x^3}-8x^2-4x+8-2=2x^4-8x^2-4x+6$$

$\leftrightarrow$

Prodotti notevoli

- **Somma per differenza:**

Un binomio, somma di due monomi, se moltiplicato per la differenza, da come risultato la differenza dei quadrati dei monomi.

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2} \quad (7.1)$$

Esempio:
$(2a^2+3ab)\cdot(2a^2-3ab)=(2a^2)^2-(3ab)^2=4a^4-9a^2b^2$

Dimostrazione:
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

- **Quadrato di Binomio:**

Il quadrato di un binomio, produce come risultato un trinomio formato dal quadrato del primo monomio, più il quadrato del secondo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo.

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2} \quad (7.2)$$

Esempio:
$(2a^2-3ab)^2\cdot=(2a^2)^2+2\cdot(2a^2)\cdot(-3ab)+(-3ab)^2=4a^4-12a^3b+9a^2b^2$

Dimostrazione:
Una potenza al quadrato corrisponde alla base moltiplicata per se stessa.
$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

- **Quadrato di un polinomio con più di due termini:**

Il quadrato di un polinomio, produce come risultato un polinomio formato dalla somma dei quadrati di tutti i monomi, più il doppio prodotto di tutte le coppie formate dai monomi.

$$\boxed{(a+b+c+...+n)^2=a^2+b^2+c^2+...+n^2+2ab+2ac+...+2an+2bc+...+2bn+...+2cn+...} \quad (7.3)$$

Quadrato di trinomio: $(a+b+c)^2$

- Somma dei quadrati dei monomi: $a^2+b^2+c^2$
- Possibili coppie: ab, ac, bc
- Somma del doppio prodotto delle coppie: $2ab+2ac+2bc$
- Risultato: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Quindi $\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$ (7.4)

Quadrato di polinomio con quattro termini: $(a+b+c+d)^2$

- Somma dei quadrati dei monomi: $a^2+b^2+c^2+d^2$
- Possibili coppie: ab, ac, ad, bc, bd, cd
- Somma del doppio prodotto delle coppie: $2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$
- Risultato: $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

Quindi $\boxed{(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}$ (7.5)

Il procedimento è analogo anche per i polinomi più numerosi.

<u>Esempio: (trinomio)</u>

$(2a^2-3ab-bc)^2$

- Somma dei quadrati dei monomi: $(2a^2)^2+(-3ab)^2+(-bc)^2=4a^4+9a^2b^2+b^2c^2$
- Possibili coppie: $(2a^2)(-3ab), (2a^2)(-bc), (-3ab)(-bc)$
- Somma del doppio prodotto delle coppie: $-12a^3b-4a^2bc+6ab^2c$
- Risultato: $4a^4+9a^2b^2+b^2c^2-12a^3b-4a^2bc+6ab^2c$

Quindi $(2a^2-3ab-bc)^2=4a^4+9a^2b^2+b^2c^2-12a^3b-4a^2bc+6ab^2c$

- **<u>Cubo di Binomio e di Trinomio:</u>**

Il procedimento per calcolare il cubo di un polinomio è molto simile a quello per calcolare il quadrato:

- Si calcola la somma dei cubi di tutti i monomi; **(a)**
- Si verificano le possibili coppie;
- Per ogni singola coppia (formata da due monomi):
  - Triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo monomio;
  - Triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo monomio;
  - Si considera la somma dei due tripli prodotti **(b)**
- Il risultato è dato dalla somma di **(a)** e di **(b)** sopra indicati.

Cubo di Binomio: $(a+b)^3$

- Somma dei cubi dei monomi: a^3+b^3 **(a)**
- Possibili coppie: ab
- Somma dei tripli prodotti della coppia ab: $3a^2b+3ab^2$ **(b)**
- Risultato **(a)+(b)**: $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

Quindi $\boxed{(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}$ (7.6)

Cubo di Trinomio: $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$

- Somma dei quadrati dei monomi: $a^2+b^2+c^2$ **(a)**
- Possibili coppie: ab, ac, bc
- Somma dei tripli prodotti della coppia ab: $3a^2b+3ab^2$ **(b)**
- Somma dei tripli prodotti della coppia ac: $3a^2c+3ac^2$ **(b)**
- Somma dei tripli prodotti della coppia bc: $3b^2c+3bc^2$ **(b)**
- Risultato **(a)+(b)**: $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2$

Quindi $\boxed{(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2}$ (7.7)

- **Potenza n-sima di Binomio:**

Per calcolare la potenza di binomio è possibile utilizzare due metodi:

Metodo di Newton

Il metodo di Newton prevede l'utilizzo della seguente formula, in cui ritroviamo il coefficiente binomiale descritto in precedenza:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k\right]} \quad (7.8)$$

Vediamo l'utilizzo della formula dalla potenza 2 alla potenza 4:

Potenza 2:

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2}\left[\binom{2}{k}\cdot a^{2-k}b^k\right] = \binom{2}{0}\cdot a^{2-0}b^0 + \binom{2}{1}\cdot a^{2-1}b^1 + \binom{2}{2}\cdot a^{2-2}b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Potenza 3:

$$(a+b)^3=\sum_{k=0}^{3}\left[\binom{3}{k}\cdot a^{3-k}b^k\right]=\binom{3}{0}\cdot a^{3-0}b^0+\binom{3}{1}\cdot a^{3-1}b^1+\binom{3}{2}\cdot a^{3-2}b^2+\binom{3}{3}\cdot a^{3-3}b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Potenza 4:

$$(a+b)^4=\sum_{k=0}^{4}\left[\binom{4}{k}\cdot a^{4-k}b^k\right]=\binom{4}{0}\cdot a^{4-0}b^0+\binom{4}{1}\cdot a^{4-1}b^1+\binom{4}{2}\cdot a^{4-2}b^2+\binom{4}{3}\cdot a^{4-3}b^3+\binom{4}{4}\cdot a^{4-4}b^4$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Metodo di Tartaglia

Il metodo di Tartaglia rappresenta un'agevolazione al metodo precedente. Come ci suggerisce la formula di Newton e lo sbroglio della formula nei tre casi precedenti, ogni termine del polinomio risultante è formato dal prodotto di tre parti che seguono una certa regolarità:

1. Coefficiente (coefficiente binomiale)
2. Potenza del primo monomio
3. Potenza del secondo monomio

Vediamo di seguito la regolarità che seguono questi tre elementi che costituiscono ogni termine del risultato della potenza n-sima di binomio.

Coefficiente

Il coefficiente è sempre un coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, in cui n è la potenza del binomio mentre k è una variabile che parte da 0 nel primo termine del risultato fino ad arrivare ad n nell'ultimo, incrementandosi di una sola unità alla volta:

$$\binom{n}{0}\to\binom{n}{1}\to\binom{n}{2}\to\ldots\to\binom{n}{n-1}\to\binom{n}{n}$$

Potenza del primo monomio

Il primo monomio a è presente in ogni termine del risultato ed ha una potenza che scende di grado ad ogni termine successivo. La potenza di a nel primo termine è proprio n cioè la potenza del binomio, e perdendo un'unità alla volta arriva all'ultimo termine con potenza nulla:

$$a^n\to a^{n-1}\to a^{n-2}\to\ldots\to a^1\to a^0$$

Potenza del secondo monomio

Il secondo monomio b come per il primo è presente in ogni termine del risultato ed ha una potenza che invece di scendere di grado, sale ad ogni termine successivo. La potenza di b nel primo termine è 0 raggiungendo l'ultimo termine con potenza n:

$$b^0 \to b^1 \to b^2 \to \dots \to b^{n-1} \to b^n$$

Riepilogando

Coefficiente	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	...	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$
1° monomio (scende di grado)	a^n	a^{n-1}	a^{n-2}	...	a^1	a^0
2° monomio (sale di grado)	b^0	b^1	b^2	...	b^{n-1}	b^n
Termini risultato	$\binom{n}{0} a^n\, b^0$	$\binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1$	$\binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2$	...	$\binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1}$	$\binom{n}{n} a^0\, b^n$

Risultato: $\binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n$

Possiamo eliminare dal risultato a^0 e b^0 poiché per la proprietà delle potenze **(2.4)** sono uguali ad 1.

La formula risultante è la seguente:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n}$$

Per risparmiare il calcolo del coefficiente binomiale, si può utilizzare un triangolo di numeri molto semplice, il **Triangolo di Tartaglia**.

Vediamo come si costruisce il triangolo di Tartaglia e come si utilizza nella formula precedente.

Il Triangolo di Tartaglia è un Triangolo di numeri così formato:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

I numeri esterni (quelli cerchiati in rosso) assumono sempre il valore 1.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

I numeri interni invece (quelli cerchiati in blu) corrispondono alla somma dei due numeri del rigo superiore più vicini a lui:

$$\begin{array}{ccccc}
a & & b & & c \\
 & a+b & & b+c &
\end{array}$$

Riprendendo la precedente formula

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Possiamo sostituire ad ogni coefficiente $\binom{n}{k}$ il k-esimo numero in riga n del triangolo.

Per comprendere meglio vediamo lo sviluppo delle potenze fino a 7.

Triangolo riga 0 per potenza 0

1

$$(a+b)^0 = 1$$

Triangolo riga 1 per potenza 1

1 1

$$(a+b)^1 = a+b$$

Triangolo riga 2 per potenza 2

1 2 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Triangolo riga 3 per potenza 3

1 3 3 1

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Triangolo riga 4 per potenza 4

1 4 6 4 1

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Triangolo riga 5 per potenza 5

1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triangolo riga 6 per potenza 6

1 6 15 20 15 6 1

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Triangolo riga 7 per potenza 7

1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^7 = a^6 + 7a^5b + 21a^4b^2 + 35a^3b^3 + 35a^3b^3 + 21a^2b^4 + 7ab^5 + b^6$$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 1: $(2x+y^2)^5$

Triangolo riga 5 per potenza 5

1 5 10 10 5 1

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Sostituiamo ad a il monomio $(2x)$ e sostituiamo a b il monomio (y^2)

$$=(2x)^5 + 5\cdot(2x)^4(y^2) + 10\cdot(2x)^3(y^2)^2 + 10\cdot(2x)^2(y^2)^3 + 5\cdot(2x)(y^2)^4 + (y^2)^5 =$$

$$=(32x^5) + 5\cdot(16x^4)(y^2) + 10\cdot(8x^3)(y^4) + 10\cdot(4x^2)(y^6) + 5\cdot(2x)(y^8) + (y^{10}) =$$

$$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$$

Infine, $(2x+y^2)^5 = 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

Esempio 2: $(x^2-3y)^4$

Triangolo riga 4 per potenza 4

1 4 6 4 1

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Sostituiamo ad a il monomio (x^2) e sostituiamo a b il monomio $(-3y)$

$$=(x^2)^4 + 4\cdot(x^2)^3(-3y) + 6\cdot(x^2)^2(-3y)^2 + 4\cdot(x^2)(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

$$=(x^8) + 4\cdot(x^6)(-3y) + 6\cdot(x^4)(+9y^2) + 4\cdot(x^2)(-27y^3) + (+81y^4) =$$

$$= x^8 - 12x^6y + 54x^4y^2 - 108x^2y^3 + 81y^4$$

Infine, $(x^2-3y)^4 = x^8 - 12x^6y + 54x^4y^2 - 108x^2y^3 + 81y^4$

↔

Scomposizione di polinomi

Nell'argomento-2 abbiamo visto che la scomposizione in fattori primi è molto utile in varie operazioni, come per esempio nel calcolo del m.c.m. e del M.C.D. e nelle operazioni con le frazioni.

Anche i polinomi si possono scomporre. Partendo da un qualsiasi polinomio, l'obiettivo è quello di trasformarlo nel prodotto di più polinomi di grado più basso fino a ridurlo ai minimi termini. Questo obiettivo viene raggiunto un passo alla volta, cioè abbassando di un grado alla volta il polinomio.

Come vedremo in seguito, questo non è sempre possibile. Un polinomio non è sempre scomponibile. Di seguito sono illustrate tutte le tecniche di scomposizione di uso comune, che generalmente sono le operazioni inverse a quelle viste nei tre paragrafi precedenti.

- **Raccoglimento a fattor comune:**

Il raccoglimento a fattor comune corrisponde all'operazione inversa della moltiplicazione di un monomio per un polinomio. Il monomio è rappresentato dal M.C.D. dei vari termini, mentre il polinomio si ricava, dividendo tutti i termini del primo polinomio per il M.C.D.

L'operazione del raccoglimento a fattor comune è anche detto "**messa in evidenza**", inoltre, può essere **totale** se eseguito su tutti i termini, o **parziale** se eseguito su alcuni termini.

Raccoglimento totale: $\boxed{\underline{x}a+\underline{x}b+\underline{x}c=x\cdot(a+b+c)}$ **(8.1)**

Esempio:
$2a^3b+4a^2b^2+2ab^3$
Il M.C.D. è $2ab$, e lo mettiamo in evidenza.
$2a^3b+4a^2b^2+2ab^3=2ab\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)$

Il raccoglimento parziale, fornisce una certa convenienza quando i polinomi ricavati dai vari raccoglimenti sono tutti uguali. Questa condizione, permette di raccogliere in una seconda fase i polinomi ricavati come elemento comune tra i vari nuovi termini.

Raccoglimento parziale:

$$\boxed{\begin{array}{c} xa + xb + ya + yb = x\cdot(a+b) + y\cdot(a+b) \\ x\cdot(a+b) + y\cdot(a+b) = (a+b)(x+y) \end{array}} \quad \textbf{(8.2)}$$

Esempio:

$2a^2c^2 + 3abc^2 + 4aby + 6b^2y$

Tra il primo e il secondo termine, il M.C.D. è ac^2

Tra il terzo e il quarto termine, il M.C.D. è $2by$

Mettiamo in evidenza ac^2 per i primi due termini e $2by$ per gli altri due.

$ac^2\cdot(2a+3b) + 2by\cdot(2a+3b)$

Possiamo mettere in evidenza $(2a+3b)$ comune ad entrambi i termini:

$(2a+3b)\cdot(ac^2+2by)$

- **Differenza di due quadrati:**

È l'operazione inversa della somma per differenza.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)} \quad \textbf{(8.3)}$$

Esempio:

$4a^4 - 9a^2b^2 = (2a^2)^2 - (3ab)^2 = (2a^2+3ab)\cdot(2a^2-3ab)$

Dimostrazione:

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

- **Somma e Differenza di cubi:**

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)} \quad \textbf{(8.4)}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)} \quad \textbf{(8.5)}$$

Esempio per la somma:

$27a^3b^6 + c^3 = (3ab^2)^3 - (c)^3 = (3ab^2 - c)\cdot(9a^2b^4 - 3ab^2c + c^2)$

Esempio per la differenza:

$a^3b^6 - 8c^3 = (ab^2)^3 - (2c)^3 = (ab^2 - 2c)\cdot(a^2b^4 + 2ab^2c + 4c^2)$

Dimostrazione:
Per la differenza, $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$.
Per la somma, $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$.

- **Somma e Differenza di potenze dispari:**

Somma: $\boxed{a^n+b^n=(a+b)\cdot(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})}$ **(8.6)**

Differenza: $\boxed{a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})}$ **(8.7)**

Nella somma, i termini del secondo polinomio sono di segno alterno $+-+-...$, mentre nella differenza il secondo polinomio ha solo segni positivi.

- **Differenza di potenze pari:**

$$\boxed{a^{2n}-b^{2n}=(a^n+b^n)\cdot(a^n-b^n)} \quad \textbf{(8.8)}$$

- **Somma di potenze pari:**

Generalmente non è scomponibile ma esistono casi particolari:

Primo caso: $a^4+4b^4=\underbrace{a^4+4b^4+4a^2b^2}_{quadrato.di..binomio}-4a^2b^2=\underbrace{(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2}_{differenza.di..due.quadrati}$

Generalizzando: $\boxed{a^{4n}+4b^{4n}=\underbrace{a^{4n}+4b^{4n}+4a^{2n}b^{2n}}_{quadrato.di..binomio}-4a^{2n}b^{2n}=\underbrace{(a^{2n}+2b^{2n})^2-4a^{2n}b^{2n}}_{differenza.di..due.quadrati}}$ **(8.9)**

Secondo caso: $a^6+b^6=\underbrace{(a^2)^3+(b^2)^3}_{somma..di..potenze.dispari}$

Generalizzando: $\boxed{a^{d\cdot 2n}+b^{d\cdot 2n}=\underbrace{(a^{2n})^d+(b^{2n})^d}_{somma..di..potenze.dispari}}$ **(8.10)**

- **Trinomio particolare:**

Il trinomio particolare è un trinomio di secondo grado ad una variabile, del tipo x^2+sx+p, dove le lettere s e p sono coefficienti, mentre la lettera x è la variabile.

Per indicare i coefficienti, sono state scelte le lettere s e p per una questione di memoria, poiché s sta per somma e p sta per prodotto.

Il trinomio si scompone nel seguente modo:

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + sx + p = (x+\alpha)(x+\beta) \\ \alpha + \beta = s \\ \alpha \cdot \beta = p \end{cases}} \quad \textbf{(8.11)}$$

In pratica, dato il trinomio $x^2 + sx + p$, dobbiamo trovare due numeri α e β tali che la loro somma è uguale ad s e il loro prodotto è uguale a p, in questo modo il trinomio si può scomporre in $(x+\alpha)(x+\beta)$.

<u>Esempio 1:</u>
$x^2 + 3x + 2$
Trovare due numeri che sommati danno $(+3)$ e moltiplicati danno $(+2)$;
I numeri sono $(+1)$ e $(+2)$, infatti, $(+1)+(+2)=(+3)$ e $(+1)\cdot(+2)=(+2)$;
In fine, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2)$.

<u>Esempio 2:</u>
$x^2 + 3x - 10$
Trovare due numeri che sommati danno $(+3)$ e moltiplicati danno (-10);
I numeri sono $(+5)$ e (-2), infatti, $(+5)+(-2)=(+3)$ e $(+5)\cdot(-2)=(-10)$;
In fine, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2)$.

<u>Dimostrazione:</u>
$(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\cdot\beta = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\cdot\beta$
Sapendo che $\alpha + \beta = s$ e $\alpha \cdot \beta = p$
Risulta $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\cdot\beta = x^2 + sx + p$.

- **<u>Inverso del quadrato di binomio:</u>**

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

<u>Esempio:</u>
$4a^4 - 12a^3b + 9a^2b^2 = (2a^2)^2 + 2\cdot(2a^2)\cdot(-3ab) + (-3ab)^2 = (2a^2 - 3ab)^2$.

➢ Scomposizione mediante la regola di Ruffini:

La scomposizione mediante la regola di Ruffini, e quel tipo di scomposizione che si applica a qualunque polinomio ordinato di una variabile.

Lo scopo di questa scomposizione è quello di trasformare un polinomio $P(x)$ di grado n, in un prodotto di due polinomi: il primo $Q(x)$, di grado $n-1$, e l'altro un binomio di tipo $(x-\alpha)$. La condizione necessaria è che il polinomio deve risultare nullo se sostituiamo alla variabile x il numero α.

$$\boxed{P(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x) \quad P(\alpha)=0}$$

Dato un polinomio $ax^n+bx^{n-1}+...+px+q$, vediamo quali sono i passi da seguire per scomporlo mediante questa regola:

Prima fase - Ricerca del valore di α:

1. Assicurarsi che il polinomio sia ordinato e ridotto a forma normale;
2. Determinare i divisori di q, termine noto del polinomio;
3. Determinare i divisori di a, coefficiente del termine di grado massimo ax^n;
4. Elencare tutte le possibili frazioni $\dfrac{divisori..di..q}{divisori..di..a}$;
5. Verificare quale frazione, che sostituita alla variabile x azzera il polinomio;

A questo punto abbiamo trovato il tanto ricercato valore di α, e quindi conosciamo anche la struttura del binomio $(x-\alpha)$.

Quindi, $ax^n+bx^{n-1}+...+px+q=(x-\alpha)\cdot(2°\,polinomio)$.

Seconda fase - Costruzione del secondo polinomio:

Per la seconda fase, cioè per ricavare il secondo polinomio, basta eseguire la divisione mediante la regola di Ruffini descritta precedentemente, tra il primo polinomio e il binomio $(x-\alpha)$.

$$(2°\,polinomio)=\frac{ax^n+bx^{n-1}+...+px+q}{(x-\alpha)}$$

Esempio:
Scomporre il polinomio $P(x)=2x^3-7x^2+x+4$ mediante la regola di Ruffini

Seguiamo i passaggi per la ricerca del termine noto α e quindi del binomio $(x-\alpha)$:

Punto 1, assicurarsi che il polinomio sia ordinato.

$P(x)=2x^3-7x^2+x+4$ Ordinato!

Punto 2, determinare i divisori di q:

$q=4$ Divisori di q: ± 1, ± 2 e ± 4

Punto 3, determinare i divisori di a:

$a=2$ Divisori di q: ± 1 e ± 2

Punto 4, elencare le possibili frazioni:

$\pm\frac{1}{1}=\pm 1$; $\pm\frac{2}{1}=\pm 2$; $\pm\frac{4}{1}=\pm 4$; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{2}{2}=\pm 1$; $\pm\frac{4}{2}=\pm 2$.

Quindi i possibili valori di α sono: ± 1, ± 2, ± 4 e $\pm\frac{1}{2}$.

Punto 5, quale di questi valori azzera il polinomio?

Proviamoli uno ad uno fino a che non si annulla il polinomio.

Proviamo -1, $P(-1)=-2-7-1+4=-6$ NO!
Proviamo $+1$, $P(+1)=2-7+1+4=0$ SI! Trovato!

Quindi il termine noto $\alpha=+1$, pertanto il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-1)$.

$2x^3-7x^2+x+4=(x-1)\cdot(2°\,polinomio)$

Per ricavare il secondo polinomio, non ci resta che applicare la divisione mediante la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -7 & +1 & +4 \\ +1 & & +2 & -5 & -4 \\ \hline & 2 & -5 & -4 & // \end{array}$$

La prima cosa che bisogna tener conto è che il resto deve necessariamente essere nullo, altrimenti è stato commesso qualche errore di calcolo.

In fine, il 2° polinomio è $2x^2-5x-4$, per cui il risultato di questa prima scomposizione è $P(x)=2x^3-7x^2+x+4=(x-1)\cdot(2x^2-5x-4)$

- **Riepilogo delle scomposizioni:**

Quando scomponiamo un polinomio, la scomposizione termina, quando tutti i fattori non sono più scomponibili (Ridotto ai minimi termini). Ad esempio, nell'esercizio precedente, abbiamo scomposto $P(x)=2x^3-7x^2+x+4=(x-1)\cdot(2x^2-5x-4)$

Questa scomposizione non è finita, poiché tra i fattori del risultato è presente il polinomio $(2x^2-5x-4)$ che è ancora scomponibile.

Di seguito una tabella di riepilogo per le possibili scomposizioni in funzione del numero dei termini:

Numero Termini	Scomposizione
2	Raccoglimento a fattor comune
	Differenza di quadrati
	Somma o differenza di cubi
	Somma o differenza di potenze
3	Raccoglimento a fattor comune
	Inverso del quadrato di binomio
	Trinomio particolare
	Regola di Ruffini
> 3 pari	Raccoglimento a fattor comune totale o parziale
	Regola di Ruffini
> 3 dispari	Raccoglimento a fattor comune
	Regola di Ruffini

- **M.C.D. e m.c.m. di polinomi**

La finalità delle scomposizioni è quello di poter eseguire le espressioni algebriche in cui sono presenti le frazioni. Infatti, quando semplifichiamo, o eseguiamo una qualsiasi operazione con le frazioni, anche se non sempre ce ne accorgiamo, ricorriamo sempre alla scomposizione in fattori primi.

Per eseguire il M.C.D. e il m.c.m. per prima cosa si devono **scomporre i polinomi ai minimi termini**.

Il **M.C.D.** è il prodotto dei fattori **solo comuni**, presi una sola volta con il **minimo esponente**.

Il **m.c.m.** è il prodotto dei fattori **comuni e non comuni**, presi una sola volta con il **massimo esponente**.

Esempio, calcolare il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti polinomi:

Polinomio 1: $2a^2x+4abx+2b^2x$
Polinomio 2: a^2xy-b^2xy
Polinomio 3: $3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz$

Questi esempi sono utili anche come esercitazione alle scomposizioni.

Scomponiamo il polinomio 1: $2a^2x+4abx+2b^2x$
Mettiamo in evidenza $2x$ comune a tutti i termini:
$2a^2x+4abx+2b^2x=2x\cdot\left(2a^2+2ab+b^2\right)$
Possiamo ancora scomporre $\cdot\left(2a^2+2ab+b^2\right)$, inverso del quadrato di binomio:
$\left(2a^2+2ab+b^2\right)=(a+b)^2$
In fine, $2a^2x+4abx+2b^2x=2x\cdot(a+b)^2$

Scomponiamo il polinomio 2: a^2xy-b^2xy
Mettiamo in evidenza xy comune a tutti i termini:
$a^2xy-b^2xy=xy\cdot\left(a^2-b^2\right)$
Possiamo ancora scomporre $\left(a^2-b^2\right)$, differenza di 2 quadrati:
$\left(a^2-b^2\right)=(a+b)(a-b)$
In fine, $a^2xy-b^2xy=xy\cdot(a+b)(a-b)$

Scomponiamo il polinomio 3: $3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz$
Mettiamo in evidenza $3xz$ comune a tutti i termini:
$3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz=3xz\cdot(ac+bc+ad+bd)$
Possiamo ancora scomporre $(ac+bc+ad+bd)$, con un raccoglimento parziale:
$ac+bc+ad+bd=c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)=(a+b)(c+d)$
In fine, $3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz=3xz\cdot(a+b)(c+d)$

Confrontiamo tra loro le scomposizioni.

Polinomio 1 scomposto: $2x\cdot(a+b)^2$
Polinomio 2 scomposto: $xy\cdot(a+b)(a-b)$
Polinomio 3 scomposto: $3xz\cdot(a+b)(c+d)$

Il M.C.D. è il prodotto dei fattori solo comuni, presi una sola volta con il minimo esponente.

Fattori comuni: x; $(a+b)$
Minimo esponente di x: 1
Minimo esponente di $(a+b)$: 1

M.C.D. = $x\cdot(a+b)$

Il m.c.m. è il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi una sola volta con il massimo esponente.

Fattori comuni e non: 2; 3; x; y; z; $(a+b)$; $(a-b)$; $(c+d)$;
Massimo esponente di 2: 1
Massimo esponente di 3: 1
Massimo esponente di x: 1
Massimo esponente di y: 1
Massimo esponente di z: 1
Massimo esponente di $(a+b)$: 2
Massimo esponente di $(a-b)$: 1
Massimo esponente di $(c+d)$: 1

m.c.m. = $2\cdot3\cdot x\cdot y\cdot z\cdot(a+b)^2\cdot(a-b)\cdot(c+d)=6xyz(a+b)^2(a-b)(c+d)$

$\leftrightarrow$

Espressioni letterali

Nell'argomento-2 abbiamo affrontato la risoluzione delle espressioni numeriche. Nelle espressioni letterali, la presenza delle lettere non costituisce una variazione nel metodo di risoluzione, la differenza sostanziale sta solamente nell'esecuzione delle singole operazioni, che non sono operazioni di numeri ma operazioni con monomi e polinomi.

Se si è in grado di svolgere le operazioni numeriche con facilità, risulterà altrettanto facile risolvere espressioni letterali. A tale scopo, riportiamo qui di seguito un esempio.

Risolvere la seguente espressione:

$$\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{4-x}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)=$$

Prima di tutto dobbiamo risolvere le espressioni contenute nelle parentesi.
Poiché ci sono somme di frazioni, che richiedono il calcolo del m.c.m. dei denominatori, per prima cosa, scomponiamo tutti i denominatori scomponibili.

Solo il primo denominatore $\left(x^2-4\right)$ è scomponibile come differenza di due quadrati.

$$=\left(\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{4-x}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)=$$

Il m.c.m. è necessario solo nella prima parentesi, nelle altre due parentesi troviamo l'addizione di numero misto.

$$=\left(\frac{4-(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\left(\frac{4-x-6}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$

Ora ci troviamo di fronte al prodotto di tre frazioni. Anche per la semplificazione è utile la scomposizione, pertanto portiamo i numeratori a forma normale e successivamente li scomponiamo.

$$=\left(\frac{4-x^2-4+4x}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\left(\frac{-x-2}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{-x^2+4x}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\left(\frac{-x-2}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$

Una volta ridotti a forma normale, procediamo con le scomposizioni.

$$=\left(\frac{4x-x^2}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\left(\frac{-(x+2)}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{x(4-x)}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\left(-\frac{x+2}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)=$$

A questo punto è tutto scomposto ai minimi termini e possiamo quindi procedere con le semplificazioni.

$$=\left(\frac{{}^{1}\cancel{x}\cancel{(4-x)}^{1}}{{}_{1}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}_{1}}\right)\cdot\left(-\frac{{}^{1}\cancel{x+2}}{{}_{1}\cancel{4-x}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{x-2}^{1}}{\cancel{x}_{1}}\right)=$$

$$=(1)\cdot(-1)\cdot(1)=-1$$

= FINE =