OLTRE LA BOTANICA
LA SEZIONE AUREA
DAGLI ATOMI ALLE STELLE

Numero 2

La sezione aurea in matematica

= Fra Luca Pacioli con Guidobaldo il Duca di Urbino in ritratto di Jacopo de Barberi =

Rubrica curata da
Francesco Di Noto e Eugenio Amitrano
http://www.atuttoportale.it/

Dopo il primo numero "la sezione aurea nel corpo umano" parleremo della "**Matematica aurea**", ossia delle principali relazioni tra numero aureo e calcoli matematici.

Nell'articolo "Botanica Aurea", l'articolo dal quale è nata questa rubrica, abbiamo osservato che il rapporto dei termini della successione di Fibonacci, ognuno con il proprio precedente, si avvicinava rapidamente al valore della Sezione Aurea.

Ebbene, in tutte le successioni Fibonacci simili, cioè quelle successioni in cui ogni termine è costituito dalla somma dei due termini che lo precedono, a partire da una qualsiasi coppia di numeri, il rapporto di ogni termine con il precedente si avvicina rapidamente al valore della Sezione Aurea al crescere della successione.

Ad esempio, partendo dalla coppia formata dai numeri 2 e 1, otteniamo la seguente successione:: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, …

Dividendo ogni termine per il suo precedente otteniamo:

$\frac{1}{2}=0{,}5$ $\quad \frac{3}{1}=3,$ $\quad \frac{4}{3}=1{,}\bar{3}$ $\quad \frac{7}{4}=1{,}75$ $\quad \frac{11}{7}=1{,}5714...$ $\quad \frac{18}{11}=1{,}\overline{63}$ $\quad \frac{29}{18}=1{,}6\bar{1}$ $\quad \frac{47}{29}=,1{,}62...$
$\frac{76}{47}=1{,}617...$ $\quad \frac{123}{76}=1{,}6184...$ $\quad \frac{199}{123}=1{,}61788...$ a seguire tutti circa 1,6180…

Anche in questo caso, i rapporti si avvicinano rapidamente alla Sezione Aurea.

La successione del nostro esempio, con la coppia di numeri di partenza 2 e 1, è conosciuta come "**Successione di Lucas**", la quale è molto apprezzata e usata in matematica, ad esempio uno dei suoi utilizzi è la verifica della primalità di un numero (***Rif. 1***).

Le successioni di Fibonacci, di Lucas e tutte le Fibonacci simili, non sono legate al numero aureo solo con il rapporto dei termini con i precedenti, ma anche con le formule che ne determinano i termini stessi. Per la determinazione dei termini della successione di Fibonacci è famosa la **Formula di Binet**:

$$Fib(n)=\frac{\Phi^n-(1-\Phi)^n}{\sqrt{5}} \qquad \Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180339...$$

Dove $Fib(n)$ è l'n-simo numero di Fibonacci e Φ è il nostro numero aureo.
Di seguito osserviamo lo sviluppo della formula per i primi 20 termini:

	A	B	C	D
n	Φ^n	$(1-\Phi)^n$	C = A – B	C / √5
1	1,618033989	-0,618033989	2,236067977	1
2	2,618033989	0,381966011	2,236067977	1
3	4,236067977	-0,236067977	4,472135955	2
4	6,854101966	0,145898034	6,708203932	3
5	11,09016994	-0,090169944	11,18033989	5
6	17,94427191	0,05572809	17,88854382	8
7	29,03444185	-0,034441854	29,06888371	13
8	46,97871376	0,021286236	46,95742753	21
9	76,01315562	-0,013155617	76,02631123	34
10	122,9918694	0,008130619	122,9837388	55
11	199,005025	-0,005024999	199,01005	89
12	321,9968944	0,00310562	321,9937888	144
13	521,0019194	-0,001919379	521,0038388	233
14	842,9988138	0,001186241	842,9976275	377
15	1364,000733	-0,000733137	1364,001466	610
16	2206,999547	0,000453104	2206,999094	987
17	3571,00028	-0,000280034	3571,00056	1597
18	5777,999827	0,00017307	5777,999654	2584
19	9349,000107	-0,000106963	9349,000214	4181
20	15126,99993	6,6107E-05	15126,99987	6765

La formula di Binet si può generalizzare per qualsiasi successione Fibonacci simile (***Rif. 2***) in cui ritroviamo sempre il numero aureo.

Proseguiamo con un indovinello matematico molto affascinante:
Quanto valgono le seguenti due espressioni?

a) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\ldots}}}}}$

Vi fornisco qualche indizio. Entrambe le espressioni valgono lo stesso numero, ed è un numero che conosciamo molto bene.

State pensando al numero aureo? Giusto! Il risultato è proprio la Sezione Aurea e per verificarlo richiamiamo due proprietà che abbiamo incontrato nell'articolo "Botanica Aurea":

1) $\Phi^2 = (1.6180339...)^2 = 2.6180339... = \Phi + 1$

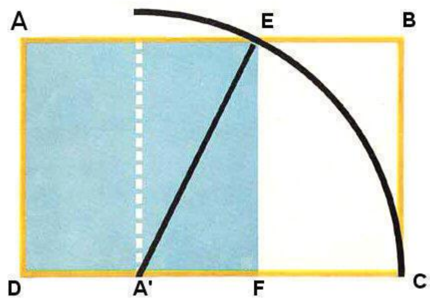
2) $\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{1.6180339...} = 0.6180339... = \Phi - 1$

In pratica, la prima proprietà ci dice che $\Phi^2 = \Phi + 1$, quindi applicando la radice quadrata, possiamo scrivere che $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$.
Poiché, per il Φ che si trova sotto la radice vale sempre la proprietà $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$, possiamo scrivere che $\sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}$, quindi Φ è anche uguale a $\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}$.
Proseguendo con le sostituzioni otteniamo $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}$, poi ancora $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}}$, e ancora fino all'infinito otteniamo alla fine $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$.

La seconda proprietà invece ci dice che $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, quindi $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.
Al Φ che si trova a denominatore posso ancora applicare la proprietà $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, quindi possiamo scrivere che $1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}$, pertanto Φ è anche uguale a $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}$.
Proseguendo con le sostituzioni fino all'infinito, infine otteniamo che $\Phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{...}}}}}$.

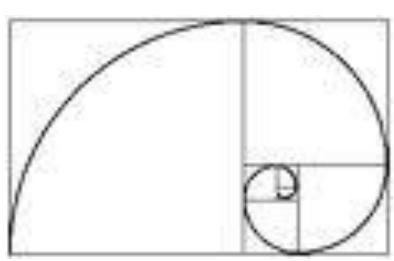
Anche in geometria esistono numerosi legami con la sezione aurea. Come sappiamo le figure geometriche di maggiore spicco sono il pentagono, la stella a 5 punte e la spirale aurea, ma ne esistono delle altre, tra cui la più famosa è il rettangolo aureo.

Il rettangolo aureo è un particolare rettangolo in cui il rapporto tra le due dimensioni corrisponde alla sezione aurea:



Il rettangolo aureo è molto utilizzato in molti ambiti. É adottato persino per dare forma a molti oggetti commerciali, tra cui la carta di credito e un noto snack al cioccolato.

Inoltre, un rettangolo aureo, può essere diviso in un quadrato e un rettangolo. Il rettangolo che ne viene fuori è anch'esso un rettangolo aureo e se a quest'ultimo procediamo con un'altra divisione e così per gli altri rettangoli più piccoli, ritroviamo infine la costruzione per la spirale aurea.



Di seguito, elenchiamo alcune relazioni davvero simpatiche sfruttando alcune proprietà della successione di Fibonacci:

Terne pitagoriche
Esiste un legame tra le terne pitagoriche e i numeri di Fibonacci scoperto da Charles Raine. Presi 4 numeri di Fibonacci consecutivi, indicati rispettivamente con a, b, c e d, e si calcolano i seguenti due numeri:

- $x = a \times d$
- $y = 2 \times b \times c$

Risulta che la somma dei loro quadrati ($x^2 + y^2$) è un quadrato perfetto e indicando con z la sua radice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, possiamo considerare la terna x, y e z una terna pitagorica.

Inoltre, quattro numeri di Fibonacci consecutivi, il prodotto del primo col quarto ($a \times d$) è sempre pari al prodotto del secondo col terzo ($b \times c$) aumentato o diminuito di 1.

Quadrati di Fibonacci
Nel 1963, John H. E. Cohn dimostrò che gli unici numeri di Fibonacci ad essere quadrati perfetti sono 0, 1 e 144. Sembra che il numero 144 è anche l'ultimo numero di Fibonacci usato dalla natura.

Per concludere, sul sito del Gruppo Eratostene (http://www.gruppoeratostene.com/) sono stati eseguiti numerosi lavori in cui si validano relazioni matematiche con la sezione aurea, si vedano per approfondimenti i riferimenti 3, 4 e 5.

Riferimenti

1. **Test di primalità mediante la Successione di Lucas** – *E. Amitrano*
Link: http://www.atuttoportale.it/articoli/matematica/TestdiprimalitaLucas.pdf

2. **Determinazione della successione di Fibonacci generalizzata** – *E. Amitrano*
Link: http://www.atuttoportale.it/articoli/matematica/FormulasuccessionegeneralizzatadiFibonacci.pdf

3. **Relazioni tra i numeri di Fibonacci e i numeri di Keith** – *Gr.Eratostene*
Link: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/Stime%20empiriche%20per%20Fibonacci-Keith-keith%20inversi.pdf

4. **Generalizzazione di Fibonacci e paradosso dei quadrati** – *Gr.Eratostene*
Link 1ª parte: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/GenFib1.pdf
Link 2ª parte: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/GenFib2.pdf

5. **Relazioni tra i numeri di Fibonacci e il triangolo di Tartaglia** – *Gr.Eratostene*
Link: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/fibonacci-tartaglia.pdf

6. **Index of the Fibonacci Quarterly (*Sito Web*)**
Link: http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/quarterlyindex.html

7. **The Fibonacci's zeta function** – *M.Nardelli e R.Turco*
Link: http://eprints.bice.rm.cnr.it/1434/1/Fibonacci%27s_zeta_function.pdf

8. **Calcolo della Sezione Aurea con 10000 decimali esatti** – *C.Teodoro*
Link: http://www.gruppoeratostene.com/articoli/CALCOLO_SEZIONE_AUREA.pdf